『離散構造』 5 章 (グラフ) の演習問題
出題: 2008.2.14
期限: 2008.2.20 の授業

問題 1 (グラフ)

無向グラフ G に対して，頂点の集合 V と辺の集合 E が，次のように定められているとする．

$V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < 90\}$

$E = \{\{x, y\} \subset V \mid (x = y * 4 + 1) \vee (x = y * 4 + 2) \vee (x = y * 4 + 3)\}$

(無向グラフであることに注意せよ。)

- 頂点 6 と頂点 16 の次数をそれぞれ求めよ．
- 頂点 0 から頂点 82 への道はあるか，同様に頂点 0 から頂点 90 への道はあるか。道がある場合は，その長さも答えよ．
- グラフ G のサイズ (辺の数) を求めよ．
- グラフ G に閉路 (サイクル) は何個あるか求めよ．
- 頂点 0 を起点とする道を考える。このような道にあらわれる頂点と辺を全て集めてできるグラフ (G の部分グラフ) を図で示せ。(これを、「頂点 0 を含む連結成分」という。)
- 他の頂点を含む G の連結成分も同様に定義できる。グラフ G の連結成分の個数を求めよ．

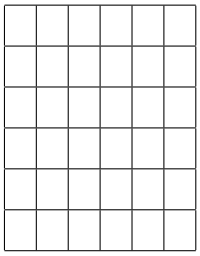
問題 2 (平面グラフ)

平面グラフとは、平面上に、どの 2 つの辺も頂点以外の場所で交わらずに描けるものである。たとえば、K_3 (位数 3 の完全グラフ) や K_4 は平面グラフであるが、K_5 は平面グラフではない。

完全二部グラフ $K_{n,m}$ が平面グラフであるかどうかは、n, m の値によって決まる。n, m がどのような値のとき平面グラフであるか、必要十分条件を述べよ。

問題 3 (数え上げ)

次の図のようなグラフにおいて、左下の頂点から右上の頂点へ行く道で、長さ 12 のものの本数を答えよ。



問題 4 (木に関する推論)

無向グラフ G が以下の条件をすべて満足しているとする。

- G は連結である。ただし、グラフ G の、どの 2 つの頂点の間にも道があるとき、G は連結であるという。
- G から、どの辺を取り除いても (頂点は除去しない)、連結でないグラフができる。

このとき、G は木であることを証明せよ。