『離散構造』 5章 (グラフ) の演習問題の解答
2008.2.20 の授業

問題 1 (グラフ)

無向グラフ G に対して，頂点の集合 V と辺の集合 E が，次のように定められているとする．

$V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < 90\}$

$E = \{\{x, y\} \subset V \mid (x = y * 4 + 1) \vee (x = y * 4 + 2) \vee (x = y * 4 + 3)\}$

(無向グラフであることに注意せよ。)

- 頂点 6 と頂点 16 の次数をそれぞれ求めよ．

  答. 頂点 6 につながる辺は、「頂点 1 への辺」、「頂点 25 への辺」、「頂点 26 への辺」、「頂点 27 への辺」の 4 本があるので、次数は 4 である。

  頂点 16 につながる辺は、「頂点 65 への辺」、「頂点 66 への辺」、「頂点 67 への辺」の 3 本があるので、次数は 3 である。

- 頂点 0 から頂点 82 への道はあるか，同様に頂点 0 から頂点 89 への道はあるか。道がある場合は，その長さも答えよ．

  (問題に誤植があり、「頂点 90」は存在しなかった。そこで、ここでは「頂点 89」に変更して解答する。)

  答. 頂点 0 から頂点 82 への道はない。(理由: 頂点 82 に接続する辺は頂点 20 へ行くものだけであり、頂点 20 からは頂点 81,82,83 へ行く辺のみがある。頂点 81,83 からの辺は頂点 20 へ行くものだけであるので、結局、頂点 82 から、これら以外の頂点へ行く道はない。)

  頂点 0 から頂点 89 への道はあり、(0,1,5,22,89) となっているので長さは 4 である。

- グラフ G のサイズ (辺の数) を求めよ．

  答. 各頂点 n に対して、$n < m$ となる頂点 m に対する辺が何本あるか数える。

  (Case 1) $0 \leq n \leq 21$ となるとき、頂点 n は、それより値が大きな頂点とは 3 本の辺を持つ。

  (Case 2) $n = 22$ となるとき、頂点 n は、それより値が大きな頂点とは 1 本の辺を持つ。

  (Case 3) $n > 22$ となるとき、頂点 n は、それより値が大きな頂点とは 0 本の辺を持つ。

  以上を合計すると、$22 * 3 + 1 = 67$ となり、G のサイズは 67 である。

- グラフ G に閉路 (サイクル) は何個あるか求めよ．

  答. 図を描くとわかるように、G に閉路は存在しない。

- 頂点 0 を起点とする道を考える。このような道にあらわれる頂点と辺を全て集めてできるグラフ (G の部分グラフ) を図で示せ。(これを、「頂点 0 を含む連結成分」という。)

  答. 木になる。(図は省略)。

- 他の頂点を含む G の連結成分も同様に定義できる。グラフ G の連結成分の個数を求めよ．

  答. 連結成分は、すべて木になる。木の根は、4 の倍数となる頂点であるので、0 以上 89 以下の 4 の倍数の個数を数えれば、木の数がわかる。このような数は、23 個あるので、連結成分も 23 個である。(追記： 連結成分という場合、通常は、頂点 1 個だけからなるものも勘定にいれるので 23 個になる。そのような、つまらない図形を除けば、6 個になる。)

問題 2 (平面グラフ)

平面グラフとは、平面上に、どの 2 つの辺も頂点以外の場所で交わらずに描けるものである。たとえば、K_3 (位数 3 の完全グラフ) や K_4 は平面グラフであるが、K_5 は平面グラフではない。

完全二部グラフ $K_{n,m}$ が平面グラフであるかどうかは、n, m の値によって決まる。n, m がどのような値のとき平面グラフであるか、必要十分条件を述べよ。

答. この問題は難しい。

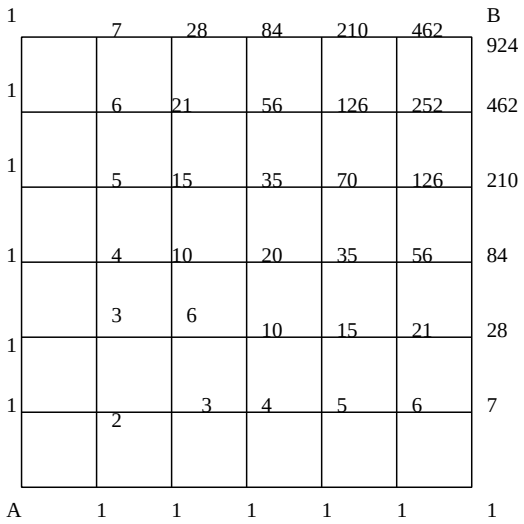
(完全グラフ) $n \leq 4$ に対して K_n は平面に描けることは明らかである。また、K_5 は平面に描けない。(証明は難しい。) したがって、$n \geq 5$ となる n に対して、K_n は平面に描けない。

(完全 2 部グラフ) $K_{1,n}$ と $K_{2,n}$ は (任意の n に対して) 平面に描ける。$K_{3,3}$ は平面に描けない。(証明は難しい。) 従って、$n \geq 3$, $m \geq 3$ となる n, m に対して、$K_{n,m}$ は平面に描けない。

問題 3 (数え上げ)

次の図のようなグラフにおいて、左下の頂点から右上の頂点へ行く道で、長さ 12 のものの本数を答えよ。

答。以下の図で、頂点 A から各頂点への最短の道の本数を示した。これからわかるように、頂点 A から頂点 B へ行く最短の道の本数は 924 本である。



問題 4 (木に関する推論)

無向グラフ G が以下の条件をすべて満足しているとする。

- G は連結である。ただし、グラフ G の、どの 2 つの頂点の間にも道があるとき、G は連結であるという。
- G から、どの辺を取り除いても (頂点は除去しない)、連結でないグラフができる。

このとき、G は木であることを証明せよ。

答。「木である」ことと「連結で閉路がない」ことは同値である。(テキスト参照)。そこで、上記の 2 条件から、G が連結で、閉路がないことを示せばよい。

(1) 連結であること： 1 つ目の条件そのものである。

(2) 閉路がないこと： G の任意の辺を e とする。2 つ目の条件から、e を取り除いて得られるグラフは、連結ではない。従って、e を通る閉路は G にはない。(もし、e を通る閉路があれば、e を除去しても、グラフは連結のままである。) よって、どの辺を通る閉路もない、ということになり、結局、G には閉路は 1 つもないことになる。