『離散構造』 4 章 (関係) の演習問題 (亀山)
出題: 2008.2.1
期限: 2008.2.8 の授業

問題 1 (2 項関係、性質)

集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上の 2 項関係を以下のように与える。(ただし、$x \mod y$ は x を y で割った余り. また、任意の自然数は 0 の約数とする。)

- $(aR_1b) \Leftrightarrow (a = 2b)$.
- $(aR_2b) \Leftrightarrow (a$ は b の約数$)$.
- $(aR_3b) \Leftrightarrow ((a-b)^3 = 9a - 9b)$.

(a) R_1 を集合として具体的に書きあらわし、反射律, 対称律, 推移律、反対称律を満たすかどうか答えよ.

(b) R_2 について同様のことを調べよ。

(c) R_3 について同様のことを調べよ。

(d) これらの二項関係のうち順序であるものを列挙せよ。

(e) これらの二項関係のうち同値関係であるものを列挙せよ。

問題 2 (直積集合上の順序)

$\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ 上の 2 項関係 S_1,S_2,S_3 を以下のように定める。ただし、「$\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ 上の 2 項関係」とは、「$\mathcal{R} \times \mathcal{R}, \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ 上の 2 項関係」のことであり、結局、$S_i \subset (\mathcal{R} \times \mathcal{R}) \times (\mathcal{R} \times \mathcal{R})$ となる。ちょっと恐しい 2 項関係だが、平面上の点の間の 2 項関係と思えばよい。

- $(\langle x_1, y_1\rangle S_1 \langle x_2, y_2\rangle) \Leftrightarrow (x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2)$.
- $(\langle x_1, y_1\rangle S_2 \langle x_2, y_2\rangle) \Leftrightarrow ((x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2))$.
- $(\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_2, y_2\rangle) \Leftrightarrow ((x_1 < x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)))$.

たとえば、$\langle 1, 3\rangle S_1 \langle 5, 2\rangle$ は成立するが、$\langle 1, 3\rangle S_2 \langle 5, 2\rangle$ は成立しない。

(a) S_1 が順序であるかどうか調べ、その理由を述べよ。

(b) S_2 が順序であるかどうか調べ、その理由を述べよ。

(c) S_3 が順序であるかどうか調べ、その理由を述べよ。

(d) S_i の中で、全順序であるものを列挙せよ。
なお、順序 R に対して、$\forall x, y.\ (xRy) \vee (yRx)$ が成立するとき「全順序」という (テキスト参照)。

問題 3 (関係の合成)

集合 A 上の 2 項関係 R に対し、R^n は $\ldots(R \circ R) \circ \cdots \circ R$ (n 個の R の合成) のことである。

- 問 1 の R_1 に対して、R_1^2, R_1^3, R_1^4 を次々に計算せよ。
- $R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3$ が推移律を満たすことを示せ。ただし、$\cup$ は集合としての和集合である。
- 問 1 の R_2 に対して、$R_2^2 = R_2$ であることを示せ。

問題 4 (同値関係 [余裕のある人のみ])

コンピュータ上で実数の演算を行なうことを考える。計算の丸め誤差 (端数が正確に表現できないための誤差) を考慮し、2 つの実数 r と s が等しいことを、$|r-s| < \epsilon$ と定めることがある。(ただし ϵ は、非常に小さな実数で、システムごとに決められている。)

この定義が、同値関係になっていないことを確かめよ。また、「等しさ」の定義として、同値関係でないものを採用したとき、プログラムを作成したり解析するときに、どのような不都合が起きるか述べよ。

問題 5 (プログラムの意味 [余裕のある人のみ])

$\mathcal{N}$ 上の 2 項関係 T_i を以下のように定める。(ただし $i = 0, 1, \ldots$ である。)

- $(x\ T_0\ y) \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 1)$.
- $(x\ T_{i+1}\ y) \Leftrightarrow ((x\ T_i\ y) \vee \exists z.\ (((x-1)\ T_i\ z) \wedge (y = xz)))$.

たとえば、$T_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$、$T_2 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ である。

(a) T_3 の要素をすべて列挙せよ。

(b) T_4 の要素をすべて列挙せよ。

(c) T_i を単なる集合と見なしたとき、$T_i \subset T_{i+1}$ を示せ。

(d) i を無限に大きくしたときの T_i の極限は何をあらわすか。