『離散構造』 4章 (関係) の演習問題の解答 (亀山)

問題 1 (2 項関係、性質)

集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上の 2 項関係を以下のように与える。(ただし、$x \mod y$ は x を y で割った余り)。

- $(aR_1b) \Leftrightarrow (a = 2b)$.
- $(aR_2b) \Leftrightarrow (a$ は b の約数$)$.
- $(aR_3b) \Leftrightarrow ((a-b)^3 = 9a - 9b)$.

(a) R_1 を集合として具体的に書きあらわし、反射律，対称律，推移律、反対称律を満たすかどうか答えよ.
$R_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 8,4\rangle\}$.
反射律は満たさない。($1R_11$ が成立しないため。)
対称律は満たさない。($2R_11$ が成立するのに、$1R_12$ が成立しないため。)
推移律は満たさない。($4R_12$ と $2R_11$ が成立するのに、$4R_11$ が成立しないため。)
反対称律は満たす。(xR_1y と yR_1x が両方成立するとしたら、$x = y = 0$ でなければいけない。)

(b) R_2 について同様のことを調べよ。
反射律は満たす。(x は x 自身の約数である。)
対称律は満たさない。($1R_22$ が成立するのに、$2R_21$ が成立しないため。)
推移律は満たす。(xR_2y と yR_2z が成立すれば、x は必ず z の約数になるので、xR_2y が成立する。)
反対称律は満たす。(x と y が互いの約数になっているということは、自然数の範囲では、$x = y$ しかない。)

(c) R_3 について同様のことを調べよ。
まず、$aR_3b \Leftrightarrow ((a = b) \vee |a - b| = 3)$ であることに注意する。
反射律は満たす。($x = y$ であれば、xR_3y となる。)
対称律は満たす。($x = y$ であれば、上記の注意により、$y = x$ である。)
推移律は満たさない。($0R_33$ と $3R_36$ が成立するのに、$0R_36$ が成立しない。)
反対称律は満たさない。($0R_33$ と $3R_30$ が成立するのに、$0 = 3$ でない。)

(d) これらの二項関係のうち順序であるものを列挙せよ。
上記の結果から、R_2 が順序である。他は順序でない。

(e) これらの二項関係のうち同値関係であるものを列挙せよ。
上記の結果から、同値関係であるものはない。

問題 2 (直積集合上の順序)

$\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ 上の 2 項関係 S_1,S_2,S_3 を以下のように定める。

- $(\langle x_1, y_1\rangle S_1 \langle x_2, y_2\rangle) \Leftrightarrow (x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2)$.
- $(\langle x_1, y_1\rangle S_2 \langle x_2, y_2\rangle) \Leftrightarrow ((x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2))$.
- $(\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_2, y_2\rangle) \Leftrightarrow ((x_1 < x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)))$.

(a) S_1 は順序ではない。

反対称律が不成立: $\langle 0,1\rangle S_1 \langle 1,0\rangle$ と、$\langle 1,0\rangle S_1 \langle 0,1\rangle$ が成立するが、$\langle 1,0\rangle$ と $\langle 0,1\rangle$ は ($\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ の要素として) 異なる。

(b) S_2 が順序であることを示せ。

反射律を満たす。($(x_1 \le x_1) \wedge (y_1 \le y_1)$ が成立)。

推移律を満たす。($(x_1 \le x_2) \wedge (y_1 \le y_2)$ と $(x_2 \le x_3) \wedge (y_2 \le y_3)$ とが両方とも成立すれば、$(x_1 \le x_3) \wedge (y_1 \le y_3)$ 成立するから。)

反対称律を満たす。($(x_1 \le x_2) \wedge (y_1 \le y_2)$ と $(x_2 \le x_1) \wedge (y_2 \le y_1)$ とが両方とも成立すれば、

以上から S_2 は順序である。

(c) S_3 が順序であることを示せ。

反射律を満たす。($\cdots \vee ((x_1 \le x_1) \wedge (y_1 \le y_1))$ が成立)。

推移律を満たす。$(x_1 < x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 \le y_2))$ と、$(x_2 < x_3) \vee ((x_2 = x_3) \wedge (y_2 \le y_3))$ が成立すると仮定する。

4 通りの場合分けを行い、すべての場合で、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_3, y_3\rangle$ が成立することを証明する。

Case-1: $(x_1 < x_2)$ かつ $(x_2 < x_3)$ のとき、$x_1 < x_3$ なので、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_3, y_3\rangle$ である。

Case-2: $(x_1 < x_2)$ かつ $(x_2 = x_3) \wedge (y_2 \le y_3)$ のとき、$x_1 < x_3$ なので、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_3, y_3\rangle$ である。

Case-3: $(x_1 = x_2) \wedge (y_1 \le y_2)$ かつ、$(x_2 < x_3)$ のとき、$x_1 < x_3$ なので、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_3, y_3\rangle$ である。

Case-4: $(x_1 = x_2) \wedge (y_1 \le y_2)$ かつ、$(x_2 = x_3) \wedge (y_2 \le y_3)$ のとき、$(x_1 = x_3) \wedge (y_1 \le y_3)$ なので、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_3, y_3\rangle$ である。

反対称律を満たす。$(x_1 < x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 \le y_2))$ と、$(x_2 < x_1) \vee ((x_2 = x_1) \wedge (y_2 \le y_1))$ が成立すると仮定。

すると、$x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ であることが容易にいえる。よって、$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$ である。

以上から S_3 は順序である。

(d) S_i の中で、全順序であるものを列挙せよ。

S_1 は順序でないので、全順序ではあり得ない。

S_2 は、$\langle 1,3\rangle S_2 \langle 3,1\rangle$ も $\langle 3,1\rangle S_2 \langle 1,3\rangle$ も成立しないので、(S_2 では、大きさを比較不能な 2 つの要素があるので) 全順序ではない。

S_3 は全順序である。理由: $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ の任意の 2 つの要素 $\langle x_1, y_1\rangle$ と $\langle x_2, y_2\rangle$ を取る。場合分けにより、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_2, y_2\rangle$ または $\langle x_2, y_2\rangle S_3 \langle x_1, y_1\rangle$ が成立することを示す。

Case-1: $x_1 < x_2$ なら、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_2, y_2\rangle$ が成立する。

Case-2: $x_1 > x_2$ なら、$\langle x_2, y_2\rangle S_3 \langle x_1, y_1\rangle$ が成立する。

Case-3: $x_1 = x_2$ なら、さらに場合分けする。

Case-3-1: $y_1 \le y_2$ なら、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_2, y_2\rangle$ が成立する。

Case-3-2: $y_1 > y_2$ なら、$\langle x_2, y_2\rangle S_3 \langle x_1, y_1\rangle$ が成立する。

従って、すべてのケースで、$\langle x_1, y_1\rangle S_3 \langle x_2, y_2\rangle$ または $\langle x_2, y_2\rangle S_3 \langle x_1, y_1\rangle$ が成立するので、S_3 は全順序である。

[解説] 順序 S_3 は辞書式順序の一種である。

問題 3 (関係の合成)

- $R_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 8,4\rangle\}$.
  $R_1^2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 8,2\rangle\}$.
  $R_1^3 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 8,1\rangle\}$.
  $R_1^4 = \{\langle 0,0\rangle\}$.
- $R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3$ が推移律を満たすことを示せ。
  $R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,1\rangle\}$.
  これが推移律を満たす 2 項関係であることは、全ての場合をチェックすることによって (しらみつぶし法)、容易にわかる。
- 問 1 の R_2 に対して、$R_2^2 = R_2$ であることを示せ。
  xR_2^2z と仮定する。x は y の約数で、y は z の約数となる $y \in A$ が存在する。従って、$mx = y$ かつ $ny = z$ となる $m, n \in \mathcal{N}$ が存在する。これらをまとめると、$mnx = z$ となる。すなわち、x は z の約数である。よって、xRz となる。
  以上から、$(xR_2^2z) \Rightarrow (xR_2z)$ がいえた。
  逆を示そう。xR_2z と仮定する。すると、xR_2x かつ xR_2z なので、xR_2^2z が言える。
  以上から、$(xR_2^2z) \Leftrightarrow (xR_2z)$ がいえた。