『離散構造』 3 章 (関数) の演習問題 (亀山)
出題: 2008.1.25
期限: 2008.2.1 の授業開始時刻

問題 1 (関数とは？)

以下の対応付けが関数あるいは部分関数であるか答えよ。

(a) このクラスの学生に、その人の学籍番号を対応付ける。

(b) このクラスの学生に、その人の持っているメールアドレスを対応付ける。

(c) このクラスの学生に、その人の友達を対応付ける。(注: 「友達」の定義は難しいが、ここは情報科学類なので、「自分の普段使うメールシステムのアドレス帳に、メールアドレスを登録している人」を友達と定義 (?) する。)

(d) このクラスの学生に、その人の友達の集合を対応付ける。

問題 2 (像、合成、全射、単射)

$f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ および $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 f と g を $f(x) = 2x^2 - 6$, $g(x) = x^3 - 3x$ で定義する．また、$\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 0\}$ とする。

(a) f による $\mathcal{R}^+$ の像 $f(\mathcal{R}^+)$ と，g による $\mathcal{R}^+$ の像 $g(\mathcal{R}^+)$ を求めよ．

(b) 合成関数 $f \circ g$ と $g \circ f$ を求めよ．

(c) 集合 A を $\mathcal{R}$ の部分集合とする．$f : \mathcal{R} \to A$ が全射となる A の例を 1 つ求めよ．

(d) 集合 B を $\mathcal{R}$ の部分集合とする．$g : B \to \mathcal{R}$ が単射となる B の例を 1 つ求めよ．

(e) $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 h で，$f \circ h = g \circ h$ となる例を 1 つ求めよ．

(f) $h' : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 h' で，$h' \circ f = h' \circ g$ となる例を 1 つ求めよ．

問題 3 集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ に対して、関数 $g : A \to A$ を $g(x) = (x * 3) \texttt{ mod } 11$ で定義する。

$n = 1, 2, \cdots$ に対して、関数 g を n 回合成した関数を g^n と表す。たとえば、$g^3 = (g \circ g) \circ g$ である。

また、$x \in A$ となるそれぞれの x の値に対して、$h(x)$ を以下のように定義する。

- $g^n(x) = 1$ となる $n \geq 1$ が存在するとき、そのような n のうち最小のものを $h(x)$ とする。
- $g^n(x) = 1$ となる $n \geq 1$ が存在しないとき、$h(x) = 0$ とする。

たとえば、$g(5) = 4$, $(g \circ g)(4) = 1$ であるので、$h(5) = 2$ である。

(a) h は、$h : A \to A$ となる関数であることを示せ。

(b) h は、全射か、また、単射か。

(c) h はどのような関数かを具体的に記述せよ。

問題 4 合成関数 $g \circ f$ が定義されるとは，関数 f の値域と，関数 g の定義域とが一致する (同じ集合である) ことを言う．たとえば，$f : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$ かつ $g : \mathcal{R} \to \mathcal{Z}$ のとき，$g \circ f$ は定義されるが，$f \circ g$ は定義されない．

(a) 合成関数 $(h \circ g) \circ f$ が定義されるとき，合成関数 $h \circ (g \circ f)$ も定義されることを示せ．