『離散構造』 3 章 (関数) の演習問題の解答 (亀山)

問題 1 (関数とは？)

以下の対応付けが関数あるいは部分関数であるか答えよ。

(a) このクラスの学生に、その人の学籍番号を対応付ける。

学生に対して、学籍番号は通常一意的に存在するので、関数である。

定義域: このクラスの学生の集合, 値域: (たとえば) 自然数。

[筑波大学ローカルな注釈] 定義域を「筑波大学の学生」に広げると関数でなくなる可能性が高い。というのは、最近、4 年生で成績優秀な人は、大学院の授業も学群在籍中に履修できる制度が始まり、履修のために、学群の学籍番号とは別に、大学院でも仮の学籍番号をもらうらしい。従って、そういう人が１人でもいたら、関数でなくなる。(だから、どう、ということはないが。)

(b) このクラスの学生に、その人の持っているメールアドレスを対応付ける。

メールアドレスを複数もっている人はいると思われるので、関数でも部分関数でもない。(具体的な反例は亀山は示せないが。)

(c) 友達を複数もっている人はいると思われるので、関数でも部分関数でもない。(具体的な反例は亀山は示せないが。)

(d) このクラスの学生に、その人の友達の集合を対応付ける。

「友達の集合」は (友達の定義さえしっかり決まっていれば) 一意的に定まるので、関数である。

問題 2 (像、合成、全射、単射)

$f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ および $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 f と g を $f(x) = 2x^2 - 6$, $g(x) = x^3 - 3x$ で定義する．また、$\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 0\}$ とする。

(a) f は $x = 0$ で最小値 -6 を取るので、$f(\mathcal{R}^+) = \{y \in \mathcal{R} \mid y \geq -6\}$.

g は $x = 1$ で最小値 -2 を取るので、$g(\mathcal{R}^+) = \{y \in \mathcal{R} \mid y \geq -2\}$.

(b) $f \circ g \ : \ \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ で、

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^3 - 3x)^2 - 6 = 2x^6 - 12x^4 + 18x^2 - 6.$

$g \circ f \ : \ \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ で、

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x^2 - 6)^3 - 3(2x^2 - 6) = 8x^6 - 72x^4 + 210x^2 - 198.$

(c) $f : \mathcal{R} \to A$ が全射となる A の例を 1 つ求めよ.

これは 1 つしかなくて、$A = f(\mathcal{R})$ である。つまり、$A = f(\mathcal{R}) = \{y \in \mathcal{R} \mid y \geq -6\}$.

これより小さい集合では f が関数にならないし、これより大きい集合では f が全射にならない。

(d) $g : B \to \mathcal{R}$ が単射となる B の例を 1 つ求めよ.

これはたくさんある。たとえば、$B = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 1\}$ とすると ($x \geq 1$ の範囲で g は狭義の単調増加なので)、g は単射になる。

あるいは、もっと楽をしたければ、$B = \{0\}$ とするとよい。(定義域が一点だけからなる集合のとき、どんな関数も単射である。)

(e) $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 h で，$f \circ h = g \circ h$ となる例を 1 つ求めよ.

これはちょっと難しい。一般的に考えるとわからなくなるので、たとえば、$x = 1$ のときにどうなるか考えると $c = h(1)$ とおけば $f(h(1)) = g(h(1))$ より $f(c) = g(c)$. つまり、c は $f(x) - g(x) = 0$ の根でなければならない。したがって、$h(1)$ は、$2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ のいずれかである。

同様に $x \neq 1$ のときも、$h(x)$ は、すべて $2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ のいずれかでなければならない。(逆に、この 3 つのどれかの値を取れば、よい。)

そこで、$h(x) = 2$ などの定数関数が答えの一例である。(天の邪鬼な人は、$x \geq 0$ のとき $h(x) = \sqrt{3}$ で、$x < 0$ のとき $h(x) = -\sqrt{3}$ などとするだろう。それも正解である。)

(f) $h' : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 h' で，$h' \circ f = h' \circ g$ となる例を 1 つ求めよ.

こちらは、前問よりやさしい。$h'(f(x)) = h'(g(x))$ という方程式を解こうと思わず、$h(x) = 0$ とでも置けばよい。(他にも無数に正解はある。)

問題 3 集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ に対して、関数 $g : A \to A$ を $g(x) = (x * 3) \bmod 11$ で定義する。

$n = 1, 2, \cdots$ に対して、関数 g を n 回合成した関数を g^n と表す。たとえば、$g^3 = (g \circ g) \circ g$ である。

また、$x \in A$ となるそれぞれの x の値に対して、$h(x)$ を以下のように定義する。

- $g^n(x) = 1$ となる $n \geq 1$ が存在するとき、そのような n のうち最小のものを $h(x)$ とする。
- $g^n(x) = 1$ となる $n \geq 1$ が存在しないとき、$h(x) = 0$ とする。

たとえば、$g(5) = 4$, $(g \circ g)(5) = 1$ であるので、$h(5) = 2$ である。(問題文では、$(g \circ g)(4) = 1$ という誤殖があり、そのために、この問題の意味がわからなかった人もいると思われる。この点、お詫びする。)

(a) h は、$h : A \to A$ となる関数であることを示せ。

まず、$g^n(x) = 1$ となる $n \geq 1$ が存在すると仮定する。N をそのような n のうちの最小値とする。

数の系列 $g(x), g^2(x), g^3(x), \cdots\ g^{N-1}(x)$ を考える。もし、これらの中に同じ値が 2 回以上出現すると、この系列はループしてしまい、永遠に 1 に到達することはないので、矛盾する。また、これらの中に 0 および 1 と同じ値はない。従って、この系列は 2 以上の A の要素たちから構成される。そのような要素はたかだか 9 個しかないので、$N - 1 \leq 9$ である。つまり、$N \leq 10$ であり、この場合、$h(x) = N \in A$ となる。

[注. ここで、鳩の巣原理らしきものを使っている. 鳩の巣原理については、テキストを参照のこと。]

$g^n(x) = 1$ となる $n \geq 1$ が存在しないとすると、$h(x) = 0 \in A$ となる。

いずれの場合も、$h(x) \in A$ となる値が一意的に決まるので、h は $A \to A$ の関数である。

(b) h は、全射か、また、単射か。

実際に h を計算してみると、$h(x) \leq 5$ であるので全射ではない。

$h(2) = h(6) = 0$ となるので単射ではない。

(c) h はどのような関数かを具体的に記述せよ。

$x = 0, 1, 2, \cdots, 10$ に対する h の値は、$0, 5, 0, 4, 1, 2, 0, 0, 0, 3, 0$ である。

問題 4 合成関数 $(h \circ g) \circ f$ が定義されるとき，合成関数 $h \circ (g \circ f)$ も定義されることを示せ.

$f : A \to B$, $g : C \to D$, $h : E \to F$ とする。

合成関数 $(h \circ g) \circ f$ が定義されるので、(当然、$h \circ g$ も定義されるので)、$D = E$ である。このとき、$h \circ g : C \to F$ である。$(h \circ g) \circ f$ が定義されるので、$B = C$ である。

$B = C$ なので、$g \circ f$ が定義され、$g \circ f : A \to D$ である。$D = E$ なので、$h \circ (g \circ f)$ が定義され、$h \circ (g \circ f) : A \to F$ である。