『離散構造』 1 章の演習問題 の解答

2007.12.17 (亀山)

今回の演習問題は、みな非常によくできていたので、ここでは、単に解答を載せるというよりは、興味がある人向けの発展的な話題を中心にした解説を記述した。思わず調子にのって書きすぎたが、ここに書いてある全ての事項の理解が必須ということではなく、「ここは発展的」という印をつけたところは、読み飛ばしてもよい。

問 1 次の文を，述語論理により論理式（命題）で表現せよ。

(a) フィギュアスケートを習っている学生もいれば、スピードスケートを習っている学生もいる。

命題論理の範囲内での答:
A=「フィギュアスケートを習っている学生もいる」、B=「スピードスケートを習っている学生もいる」とすると、「$A \wedge B$」と表現できる。

述語論理の範囲内での答:
P(x)=「x がフィギュアスケートを習っている」、Q(x)=「x がスピードスケートを習っている」，R(x)=「x は学生である」とすると、「$(\exists x.(P(x) \wedge R(x))) \wedge (\exists x.(Q(x) \wedge R(x)))$」と表現できる。

(b) フィギュアスケートとスピードスケートを習っている学生がいる。

命題論理の範囲内での答:
これは，A=「フィギュアスケートとスピードスケートを習っている学生がいる」とするしかなく,「A」という，つまらない表現しかできない.

述語論理の範囲内での答:
P(x)=「x がフィギュアスケートを習っている」、Q(x)=「x がスピードスケートを習っている」，R(x)=「x は学生である」とすると、「$\exists x.(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$」と表現できる。前問の解答と異なることに注意せよ.

(c) 雪国の人ならばアイスホッケーが好きである。

命題論理の範囲内での答:
A=「雪国の人である」，B=「アイスホッケーが好きである」とすると,「$A \Rightarrow B$」と表現できる.

述語論理の範囲内での答:
P(x)=「x が雪国の人である」、Q(x)=「x がアイスホッケーが好きである」とすると,「$\forall x.(P(x) \Rightarrow Q(x))$」と表現できる。ここで $\exists$ でなく $\forall$ であることに注意せよ．もとの日本語の文では,「すべての雪国の人は...」とは書いていないが，暗黙のうちに「雪国の人ならばすべて...」という意味だと解釈できるので，論理式としては，このように書くべきである．(と私は思う．フットノートを参照[1])

(d) 筑波大のキャンパスは日本で一番大きい。

この小問を述語論理で定式化するのは，本問の中で一番難しい.

述語論理の範囲内での答 1:
P(x)=「x は，筑波大学のキャンパスである」、Q(x)=「x は，日本にある大学のキャンパスである」、R(x,y)=「x は y と同じ広さか，より大きい (x の面積は，y の面積と同じか，より大きい．)」とすると，

$$\forall x.(P(x) \Rightarrow \forall y.(Q(y) \Rightarrow R(x,y)))$$

となる．この命題の意味するところは「x が筑波大学のキャンパスであれば，日本にあるどんな大学のキャンパスよりも，同じ広さか，より大きい.」ということであり，結局,「筑波大学のキャンパスは，日本にある大学のキャンパスの中で最大である」という意味になる.

[1] 日本語などの自然言語の表現は，曖昧さ (多義性) を持つことがあり，そのような場合,「この日本語の文を論理式で表現すると、必ずこうなる」と言い切れないこともある.

また，P なんていう述語を持ちださなくても,「筑波大学」を意味する記号 (定数) があれば，書ける，と思うだろう．実際，以下のように書いてもよい．

述語論理の範囲内での答 1':
TU=「筑波大学のキャンパス」、Q(x)=「x は，日本にある大学のキャンパスである」、R(x,y)=「x は y と同じ広さか，より大きい (x の面積は，y の面積と同じか，より大きい．)」とすると，

$$\forall y.(Q(y) \Rightarrow R(TU, y)))$$

となる．この命題の意味するところは「日本にあるどんな大学のキャンパスよりも，筑波大学は，同じ広さか，より大きい.」ということである．

(以下、問 (e) の答の直前までは発展的内容であり、興味がある人向けです。)

答 1, 答 1' は、いずれも，筑波大学と同じ面積を持つ他の大学がある可能性は排除していない．もとの日本語は「一番大きい」と言っているので，筑波大学と同じ面積の大学キャンパスも存在しないことを意味していそうである．これも日本語の解釈のしかた次第であり、離散構造の授業は，日本語解釈を目的とはしていないので，ここまでの解答でよいことにするが、気になる人のために、もう少し精密化する．

述語論理の範囲内での答 2 (誤りを含んだ答):
TU=「筑波大学のキャンパス」、Q(x)=「x は，日本にある大学のキャンパスである」、S(x,y)=「x は y より大きい (x の面積は，y の面積より大きい．)」、とすると，

$$\forall y.(Q(y) \Rightarrow S(TU, y)))$$

となりそうである．しかし，この命題は，間違った定式化である．(仮に，筑波大学のキャンパスが日本で最大であったとしても，この命題は偽になってしまう．) なぜなら，この命題が成立するとしたら，$\forall y....$ の y として，TU (筑波大学のキャンパス) を取ってもよいので，そう取ってみると，$S(TU, TU)$ が成立しなければいけない．しかし，これは「筑波大学のキャンパスは，筑波大学のキャンパスより広い」という (絶対に成立しない) 命題になるからである．

そこで，以下のように修正しよう．

述語論理の範囲内での答 2':

$$\forall y.(Q(y) \Rightarrow (y = TU \vee S(TU, y))))$$

このようにすれば,「筑波大学のキャンパスは，日本の大学の中で一番広い (同面積の他大学も存在しない)」という意味になる．ふー，何気ない問題でも意外に大変であった．

この問題には，いろいろな定式化があるので，他のやり方も見ておこう．

述語論理の範囲内での答 3:
Q(x)=「x は，日本にある大学のキャンパスである」、size(x)=「x の面積」，$x \geq y$=「実数 x は実数 y と等しいか大きい」(普通の不等号)，とすると，

$$\forall y.(Q(y) \Rightarrow (size(TU) \geq size(y)))$$

ここで $size$ というのは，変数でも定数でも述語でもなく,「関数記号」と呼ばれる．授業では，一階述語論理についてきちんと解説する時間がなかったので，関数記号を導入しなかったが，その意味は明らかであろう．

一階述語論理では，x (変数), TU (定数), $size$ (関数記号) などを組み合わせて,「もの」を表現し,「もの」と「述語」を組み合わせて基本命題 (原始論理式) を作り，基本命題と論理記号 ($\wedge$ や $\forall$ など) を組み合わせて論理式を作る，という手順になる．詳細は，記号論理の教科書を見てほしい．

(e) a は b と c の最大公約数である。

述語論理の範囲内での答: これも，いろいろな表現方法がある．
P(x,y)=「x は y の約数である」とし，$x \leq y$ は通常の意味とする．

答 1: $P(a,b) \wedge P(a,c) \wedge \forall x.((P(x,b) \wedge P(x,c)) \Rightarrow x \leq a)$

答 2: $P(a,b) \wedge P(a,c) \wedge \forall x.(x > a \Rightarrow \neg(P(x,b) \wedge P(x,c)))$

答 1，2 は異なる形に見えるが，実は，後半の $\forall x.$ の中身は,「対偶」の関係にあるので，同値の論理式である．

なお，数学 (整数論) では,「x は y の約数である」ということを $x \mid y$ と書くことが多いので，その記号を使ってもよい．

さらに，$x \mid y$ という命題は，実は，$\exists z.(xz = y)$ と書くことができるので，上記の命題で，$P(x,y)$ という形があらわれるところを，全部そのように書きかえてもよい．

さらにさらに，上記の命題では，x, y, z 等はすべて整数を表す，ということを暗黙のうちに使っているが，それを明示すべきとき (整数以外の変数も使うとき，あるいは，整数であることを明示的に意識したいとき) は,「x は整数である」ことを意味する命題を追加する必要がある．

補足 12/14 の演習の時間で，問 1 (e) の解答に関連して，以下の話題に言及した．**今回の「離散構造」の授業範囲内ではない**が，気になる人もいると思うので，補足しておく．

$\forall x \in A.\ P(x)$ や $\forall x \leq 10.\ P(x)$ という書き方をすることがよくある．これは,「全ての x に対して,,,」ではなく,「集合 A の任意の要素 x について,,,」や,「10 以下の全ての x について,,,」というように，x が動く範囲を限定したいときに使う．

これらは，それぞれ，$\forall x.\ (x \in A \Rightarrow P(x))$ や $\forall x.\ (x \leq 10 \Rightarrow P(x))$ の省略形と思うことができる．たとえば，前者は,「任意の x について，もし，それが集合 A の要素であれば，必ず $P(x)$ が成立する.」という意味の論理式であるが，この場合，x が集合 A の要素でないときには，$P(x)$ が成立しようが成立しまいが，この論理式の成否には関係ない．(命題論理において，$B \Rightarrow C$ の形の命題では，B が偽であれば，C は真であろうと偽であろうと，全体は真になることを思いだしてほしい．)

さて，話をややこしくするが，上記の省略は，$\forall$ だけでなく $\exists$ についてもあるのだが，形がことなる．つまり，$\exists x \in A.\ P(x)$ や $\exists x \leq 10.\ P(x)$ という書き方に対しては，それぞれ，$\exists x.\ (x \in A \wedge P(x))$ や $\exists x.\ (x \leq 10 \wedge P(x))$ の省略形である．ここで，$\Rightarrow$ ではなく $\wedge$ を使っていることに注意してほしい．しかし，意味を考えると，これは当然である．たとえば，$\exists x.\ (x \in A \wedge P(x))$ は,「ある x があって，x は A の要素で，かつ $P(x)$ が成立する」という意味であるので，たしかに，$\exists x \in A.\ P(x)$ と同じ意味である．これを，$\exists x.\ (x \in A \Rightarrow P(x))$ としてしまうと，まったく違う意味の論理式になる．

さて，ここまで読んできた人向けに，理解度テストを 1 つ出そう．以下の命題は，正しいか？

$$\forall x \in \phi.\ (x > x)$$

ここで ϕ は空集合 (要素を持たない集合) であり，$x > x$ はどんな x をもってきても成立しない命題である．上記の説明を正確に理解した人は，この命題が「真」であることを納得できるであろう．納得できなかった人は、「集合」の講義 (12/21 の予定) をしっかり聞いてほしい。

問 2 次の命題の真理値表を書くことにより、恒真式 (トートロジー) であるかどうかを判定せよ。

(a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A) \vee B)$.

(b) $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$.

(c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$.

これは機械的に書くだけの無味乾燥な問題である．本来ならば「真理値表を書くプログラムを書け」と言いたいところであるが，プログラミングの授業ではないので，ここは我慢して手で書いてみる．(まあ、しかし、手で書いたら、きっと 1 つぐらいは間違えるであろう。間違いを発見した人は、こっそり教員に教えてほしい。)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A) \vee B)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

以上より，3 式とも恒真式 (トートロジー) である．

問 3 以下の文を論理式（命題）で表現した上で、証明もしくは反証せよ。

(a) 自然数 n が 6 で割り切れなければ、2 でも 3 でも割り切れない。

$x|y$ により,「整数 x が 整数 y を割り切る (整数 y は整数 x の倍数である．)」ということを表すとすれば,

$$\neg(6|n) \Rightarrow ((\neg(2|n)) \wedge (\neg(3|n)))$$

となりそうである．ただし，(問題文には，はっきりそうとは書いていないが) この問題は，ある n に対して上記が成立するといっているのではなく，暗黙のうちに「どんな自然数 n に対しても上記が成立する」ということを意味していると理解できるので，正しい定式化は以下の通りである．

$$\forall n.\ (\neg(6|n) \Rightarrow ((\neg(2|n)) \wedge (\neg(3|n)))$$

問題の答えとしては，これで OK であるが，これでもまだ「n が自然数である」というところまでは表現できていないので，さらに厳密さを求めるとしたら，以下のようになる．$Nat(n)$ によって「n が自然数である」ことを表すことにして,

$$\forall n.\ (Nat(n) \Rightarrow (\neg(6|n) \Rightarrow ((\neg(2|n)) \wedge (\neg(3|n))))$$

さて，この論理式は正しくないので，反証する.「すべての n に対して...」という式を反証するためには,「それが成立しそうもない」といくら言っても駄目で,「具体的にそうでないことを示す例 (反例)」を示す必要がある．この場合,

$$\neg(\neg(6|n) \Rightarrow ((\neg(2|n)) \wedge (\neg(3|n))))$$

となるような具体的な自然数 n を 1 つ与えればよい．たとえば，$n = 2$ とすれば，$\neg(6|n)$ は真であり，$(\neg(2|n)) \wedge (\neg(3|n))$ は偽であるので，反例になっている．

(b) 整数 m, n の最小公倍数が 15 で割り切れ、m が 21 で割り切れるならば、n は 35 で割り切れる。

ここでも，$x|y$ により,「整数 x が 整数 y を割り切る (整数 y は整数 x の倍数である．)」ということを表そう．また，$lcm(x, y)$ により，自然数 x と自然数 y の最小公倍数を表すことにしよう．

すると，上記の式の定式化の 1 つは，以下の通りである．

$$\forall m.\forall n.\ (((15|lcm(m,n)) \wedge (21|m)) \Rightarrow (35|n))$$

この論理式も正しくないので，具体的な反例をだせばよい．たとえば，$m = 21, n = 5$ とすれば，$lcm(m, n) = 105$ なので，15 の倍数であり，$21|m$ であるが，$35|n$ でないので，反例になっていることがわかる．

問 4 以下の論理式が常に正しいかどうか，理由をつけて述べよ．

$((\exists x.A(x)) \wedge (\exists x.B(x))) \Rightarrow (\exists x.(A(x) \wedge B(x)))$

まず，この問題の意味を考えると，論理式の中に A や B といった述語があらわれているが，A, B が具体的に何かについては書かれていない．A, B を具体的な述語にしてみると，上記の論理式は正しかったり，正しくなかったりする．(たとえば，$A(x)$ と $B(x)$ をいずれも $x = x$ のように常に真である命題とすると，上記の論理式全体は真である．)

つまり，上記の問題は,

- もし，上記の論理式が，どんな A,B に対しても常に正しいならば，そのことを示す (証明する),
- もし，上記の論理式が，ある A,B に対して正しくないならば，そのことを反証する (具体的な A, B を示す)

ということを期待している．(ということを理解するのは，ちょっと難しかったかもしれない．← 演習問題の選択がやや杜撰でした．が，チャレンジしてくれた人がいたのには驚きました．)

実際には，後者 (「上記の論理式は常には正しくない」) であるので，具体的に成立しない A,B をもってくればよい．

たとえば，問 1(a) の P, Q をそれぞれ A, B とすると,

- $(\exists x.A(x)) \wedge (\exists x.B(x))$ は,「フィギュアスケートを習っている学生もいれば，スピードスケートを習っている学生もいる」という意味になり,
- $\exists x.(A(x) \wedge B(x))$ は,「フィギュアスケートとスピードスケートを両方とも習っている学生がいる」という意味になる．

ので，反例になりそうである．(実際にこれが「反例」といえるためには，そういう学生集団を実際にもってこないといけないが。)

あるいは，$A(x)$ として $x > 10$ という命題を取り，$B(x)$ として $x < 5$ という命題を取れば，自然数の範囲で,

$$((\exists x.A(x)) \wedge (\exists x.B(x))) \Rightarrow (\exists x.(A(x) \wedge B(x)))$$

は成立しない．

問 5 [時間がある人のみ]

以下の文を論理式で表現し，論理において正しい推論かどうか，また自然言語において正しい推論かを考えよ．

(a) 「オレンジジュースかコーヒーを買ってきてほしい」と言われたので，オレンジジュースとコーヒーを両方買ってきたら，注文と違うと言われた．

命題 O を「オレンジジュースを買う」，代理 C を「コーヒーを買う」とすると，依頼されたのは，$O \vee C$ であり，実際の行動は，$O \wedge C$ である．$(O \wedge C) \Rightarrow (O \vee C)$ は恒真式であるので，自分の行動は，依頼を満足したと思っていたのに,「それでは私の依頼を満足していない」と怒られた，という話である．

この原因は，自然言語の「か」(または) という言葉と，論理の「$\vee$」(論理和) が必ずしも一致しないことである．自然言語では,「A か B」 といったときには,「A と B のどちらか一方のみ」を意味することがあり，これは論理和ではなく,「排他的論理和」 $\oplus$ で表現すべきであった．なお，$A \oplus B$ は $(A \wedge \neg B) \vee ((\neg A) \wedge B)$ と同値であるので，排他的論理和の記号は，他の論理記号を使って表現することができる．

(b) 「0 が 1 より大きければ，太陽が地球のまわりをまわる.」

A を「0 が 1 より大きい」，B を「太陽が地球のまわりをまわる」とすると $A \Rightarrow B$ という論理式であり，実際には A も B も偽であるので，$A \Rightarrow B$ は真である．

つまり，論理的には正しいことを言っているのに，なぜか,「0 が 1 より大きければ，太陽が地球のまわりをまわる.」と言われると,「おかしい」と思ってしまう．

この「おかしさ」の原因は,「A ならば B」の A と B がまったく無関係な命題を述べているからである．自然言語では,「ならば」の前 (仮定) と，後 (結論) は関係あることを述べるものであり，まったく無関係なことを 2 つつなげると (全体としては正しいことをいっていても)「おかしな推論だ」と思ってしまう．

この違和感は，通常の論理では排除できないが,「関連性の論理 (relevalnce logic)」と呼ばれる特殊な論理で,「A と B が関連があるときのみ，$A \Rightarrow B$ が真となり得る」ということが実現できる．これは，もはや，通常の論理学というよりは，知識工学や人工知能の範囲であろう．

(c) 「フランスの国王が女性であれば、ヨーロッパには女性国王が 2 人以上いる。」(注. 実際にはフランスには国王はいない。)

これも， $A \Rightarrow B$ の形で A も B も偽である，という点では 1 つ前の問題と同じである．しかし，こちらはさらに問題があって,「フランスの国王は...」という風に，存在しないものに言及している点に違和感がある．

同様なものとして,「最大の自然数は，1 より大きい」という文がある．これも，最大の自然数がもしあるとすれば、当然 1 より大きいはずなので、正しそうに思えるが、存在しない数 (最大の自然数) に言及しているので，正しいとも正しくないとも言いにくい．論理学において、「命題」とは「正しいかどうか決められる文」のことであったので、このような文は、そもそも命題ではない．

ただし、コンピュータサイエンスのための数学の世界では，このように「存在しない数に関する命題」をどうしても書きたいことがある．たとえば，f を，整数をもらって整数を返す C 言語の関数としたとき,「f(0)」というのは，整数であるかもしれないが，計算が止まらない場合はどんな数もあらわさない．しかし，プログラムの検証では、f(0) の計算が停止するかどうかわからない段階でも、f(0) に言及したいことがあるので，普通の数学・論理学とは異なる手段が必要になってくるのである．