離散構造 期末試験 (2007 年 3 月 2 日 (金))

問 3 (集合、関係) (合計 30 点)　2 次元直交座標系 (Cartesian coordinate system, 図 1 参照) において (n, m) は、x 座標の値が n であり、y 座標の値が m である点を表す。集合 A, B, C を $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 16\}$ とおいたとき、以下の問に答えよ。ただし、$\mathbf{N}$ は自然数の集合であり、0 を含むとする。

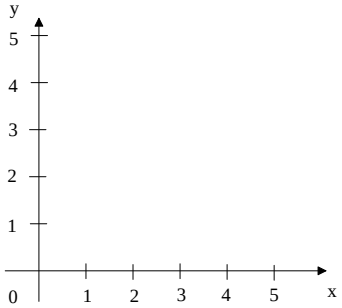

図 1: 2 次元直交座標系

(a) 集合 $2^C \cap 2^{B-A}$ を求めよ (5 点)。

(b) 空集合 $\emptyset$ は、$\forall u\ (u \notin \emptyset)$ を満たす。集合の包含関係 $\subset$ の定義に基づき、$\emptyset \subset A$ となることを証明せよ (10 点)。

(c) C 上の二項関係 R を

$$nRm \Leftrightarrow \Big(n \in A \ \wedge\ m \in B \ \wedge\ m = 2n \Big)$$

とおいたとき、R を集合として示せ (5 点)。

(d) 問 (c) で定義した C 上の二項関係 R が順序であるか否か、理由と共に示せ (5 点)。

(e) C 上の二項関係 S を

$$nSm \Leftrightarrow \Big(n \in A \ \wedge\ m \in A \Big)$$

とおいたとき、$\langle n, m \rangle \in S$ に対応する点として、図 1 の座標系の点 (n, m) に対して、ラベルとして $n + 4m - 4$ という値を付ける。このとき、S の要素に対応するすべての点を、2 次元直交座標系上にラベル付きで図示せよ (5 点)。

問 4 (集合、グラフ) (合計 20 点)　問 3 と同じ条件において、問 (e) で図示した点を頂点とし、以下のように定義される辺をもつ有向グラフを G とする。

$$\begin{aligned} & \big((x_1, y_1) \text{ から } (x_2, y_2) \text{ への辺がある} \big) \\ \Leftrightarrow\ & \Big(\big((x_2 = x_1 + 1) \wedge (y_2 = y_1) \big) \vee \big((x_2 = x_1 - 1) \wedge (y_2 = y_1 + 1) \big) \Big) \end{aligned}$$

(f) G の位数とサイズを求めよ (6 点)。

(g) グラフ G における単純道の長さの最大値を求めよ。また、このグラフ G に閉路があるかどうか答えよ (6 点)。

(h) グラフ G の部分グラフ G_{sub} を、次のように作成する。

- 集合 B から、3 個の要素を取り出す。
- G_{sub} の頂点は、G の頂点のうち、そのラベルがこれら 3 個の値になるものとする。たとえば、B の要素 5 を取りだしたなら、$(1, 2)$ が G_{sub} の頂点になる。
- G_{sub} の辺は、G の辺のうち G_{sub} の頂点同士を結ぶもの。

最初のステップでの B の要素の取り出し方により、異なる G_{sub} が得られる。このような部分グラフ G_{sub} を 2 回作成するとき、この 2 つの部分グラフは同型であるか否か、理由と共に示せ (8 点)。