離散構造 期末試験 (2007年 3月 2日 (金))

解答用紙は 2 枚である．それぞれに，学籍番号と氏名を記入すること．水色 (薄い青色) の解答用紙に問 1 と問 2 の解答を記入し，紺色 (濃い青色) の解答用紙に問 3 以降の解答を記入せよ．

解答用紙の裏面を使用してもよい．解答の記入にあたっては，問題番号 (「問 1 (a)」など) を明記せよ．

問 1 (論理) 次の P, Q, R は，あるコンピュータとある学生について記述したものである．

P	コンピュータを検査中であれば，学生はコンピュータにアクセスできない． (If the computer is being checked, the student cannot access the computer.)
Q	学生がコンピュータにアクセスできなければ，学生は課題を解くこともゲームをすることもない． (If the student cannot access the computer, he does not solve the problems and does not play a game.)
R	学生がゲームをしていなければ，コンピュータは検査中でない． (If the student does not play a game, the computer is not being checked.)

問 1(a) (配点 6 点) P, Q, R を，次の基本命題 A, B, C, D と論理記号を使った論理式として表現しなさい．ただし，論理式の括弧を省略しないこと (Do not omit parentheses in formulas).

A	コンピュータが検査中である．(The computer is being checked.)
B	学生がコンピュータにアクセスできる．(The student can access the computer.)
C	学生が課題を解く． (The student solves the problems.)
D	学生がゲームをする．(The student plays a game.)

問 1(b) (配点 9 点) 基本命題が A, B, C, D であることに注意して，命題 $(P \wedge Q) \wedge R$ の真理値表を書きなさい．

問 1(c) (配点 5 点) 「P, Q, R が正しければ，このコンピュータは検査中でない.」が恒真式 (いつでも真となる命題, tautology) かどうか，理由をつけて述べなさい．

問 2 (関数と帰納)

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とする．3 引数の関数 $f : (\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ を以下のように帰納的に定義する．

$$f(x, y, k) = \begin{cases} x + y & \text{if } k = 0 \\ f(x - y,\ y,\ k - 1) & \text{if } k > 0 \text{ and } x > y \\ f(x,\ y - x,\ k - 1) & \text{if } k > 0 \text{ and } x \leq y \end{cases}$$

また，関数 $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を $h(k) = f(12, 8, k)$ により定義する．たとえば，$h(0) = f(12, 8, 0) = 20$ である．

問 2(a) (配点 6 点) $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$ の値をそれぞれ計算しなさい．

問 2(b) (配点 8 点) 関数 h が単射 (injection) であるか，また，全射 (surjection) であるか，それぞれ理由をつけて答えなさい．

以下の設問で，$\gcd(x, y)$ は，x の約数 (x を割り切る数) かつ y の約数となる自然数のうち最大のものである．($\gcd(x, y)$ is the greatest common divisor of x and y.)

問 2(c) (配点 2 点) 「$\gcd(x, y)$ は $x + y$ の約数である」と「$x > y$ ならば $\gcd(x - y, y) = \gcd(x, y)$ である」という性質が成立する．これらの理由をごく簡単に説明しなさい．

問 2(d) (配点 10 点) 自然数 k に関する帰納法を用いて次の性質を証明しなさい．

性質: $\gcd(x, y)$ は $f(x, y, k)$ を割り切る．($\gcd(x, y)$ は $f(x, y, k)$ の約数である．)

問 2(e) (配点 4 点) 「$f(x, y, k)$ の値は，十分大きな k に対して，k によらず一定である」という性質が成立する。この理由を述べなさい．(例: $k \geq 3$ となる任意の k に対して，$f(6, 2, k) = 2$ となる．)