離散構造 期末試験 (2007 年 3 月 2 日 (金))

問 3 (集合、関係) (合計 30 点)　2 次元直交座標系 (Cartesian coordinate system, 図 1 参照) において (n, m) は、x 座標の値が n であり、y 座標の値が m である点を表す。集合 A, B, C を $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 16\}$ とおいたとき、以下の問に答えよ。但し、$\mathbf{N}$ は自然数の集合であり、0 を含むとする。

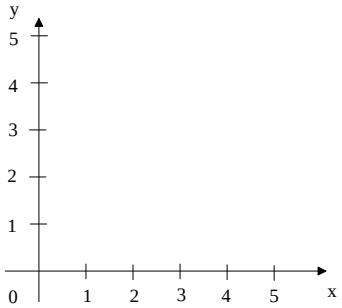


図 1: 2 次元直交座標系

(a) 集合 $2^C \cap 2^{B-A}$ を求めよ (5 点)。

(解答)

$B - A = \{5, 6\} \subset C$ であるため、

$$2^C \cap 2^{B-A} = 2^{\{5,6\}} = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5, 6\}\}$$

となる。

(b) 空集合 $\emptyset$ は、$\forall u\ (u \notin \emptyset)$ を満たす。集合の包含関係 $\subset$ の定義に基づき、$\emptyset \subset A$ となることを証明せよ (10 点)。

(解答)

解答その１）　集合の包含関係 $\subset$ の定義より、$\emptyset \subset A \Leftrightarrow \forall u\ \big(u \in \emptyset \Rightarrow u \in A\big)$ となる。この命題

$$\forall u\ \big(u \in \emptyset \Rightarrow u \in A\big) \tag{1}$$

における条件文 $u \in \emptyset$ は、空集合 $\emptyset$ が $\forall u\ (u \notin \emptyset)$ を満たすため、偽となる。よって、命題 (1) は真となり、$\emptyset \subset A$ が成り立つ。

解答その２）　$\emptyset \not\subset A$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} \emptyset \not\subset A \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\big(\emptyset \subset A\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \neg\big(\forall x\ (\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in A\ )\ \big) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x\ (\ x \in \emptyset \wedge x \notin A\ ) \end{aligned}$$

となるが、これは、$\emptyset$ の定義である $\forall u\ (u \notin \emptyset)$ と矛盾する。よって、仮定が誤りであり、$\emptyset \subset A$ が成り立つ。

(c) C 上の二項関係 R を

$$nRm \Leftrightarrow \Big(n \in A\ \wedge\ m \in B\ \wedge\ m = 2n\ \Big)$$

とおいたとき、R を集合として示せ (5 点)。

(解答)

$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle\}$

(d) 問 (c) で定義した C 上の二項関係 R が順序であるか否か、理由と共に示せ (5 点)。

(解答)

順序でない。

(その理由) 順序であるためには、R が反射的、反対称的、推移的でなくてはいけないが、以下に示すように、R は、反対称的であるが、反射的でも、推移的でもないから。

反射律） R が反射的とは、$\forall n \in C\ (nRn)$ が成り立つことだが、例えば、$1 \in C$ において、$\langle 1,1 \rangle \notin R$ であり、反射的でない。

反対称律） R が反対称的とは、$\forall n \in C\ m \in C\ (nRm \wedge mRn \Rightarrow n = m)$ が成り立つことである。$n, m \in C$ が $m = 2n \wedge n = 2m$ を満たすとすると、$3m = 0$ が成立しなくてはいけないが、$m \neq 0$ であるため、矛盾が導ける。よって、条件 $nRm \wedge mRn$ を満たす $n, m \in C$ は存在せず、前提部は常に偽となる。よって、反対称律の命題全体は真となる。よって、R は反対称的である。

推移律） R が推移的とは、$\forall n \in C\ m \in C\ l \in C\ (nRm \wedge mRl \Rightarrow nRl)$ が成り立つことである。$1R2$ と $2R4$ は成立するが、$1R4$ は成立しないので、この命題は成り立たない。よって、R は推移的でない。

注） 解答には、反対称的であることを示す必要はなく、反射的でない例、もしくは、推移的でない例の一方を示すだけでよい。

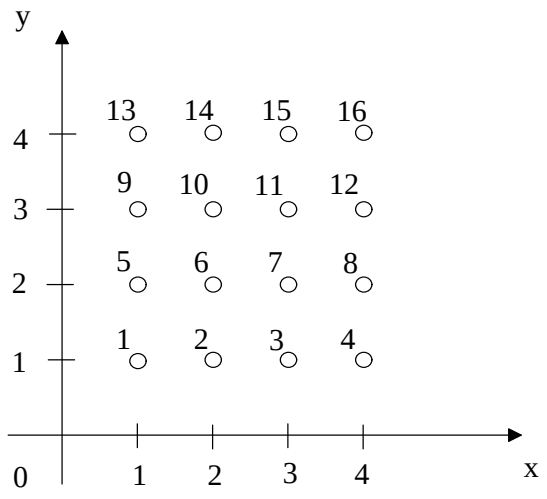
(e) C 上の二項関係 S を

$$nSm \Leftrightarrow \Big(n \in A \ \wedge\ m \in A \Big)$$

とおいたとき、$\langle n, m \rangle \in S$ に対応する点として、図 1 の座標系の点 (n, m) に対して、ラベルとして $n + 4m - 4$ という値を付ける。このとき、S の要素に対応するすべての点を、2 次元直交座標系上にラベル付きで図示せよ (5 点)。

(解答)

次のような図になる。



問 4 (集合、グラフ) (合計 20 点)　問 3 と同じ条件において、問 (e) で図示した点を頂点とし、以下のように定義される辺をもつ有向グラフを G とする。

$$
\begin{aligned}
& \big((x_1, y_1) \text{ から } (x_2, y_2) \text{ への辺がある}\big) \\
\Leftrightarrow\ & \Big(\big((x_2 = x_1 + 1) \wedge (y_2 = y_1)\big) \vee \big((x_2 = x_1 - 1) \wedge (y_2 = y_1 + 1)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

(f) G の位数とサイズを求めよ (6 点)。

(解答)

G は以下のようなグラフであるから、位数は 16 であり、サイズは 21 である。

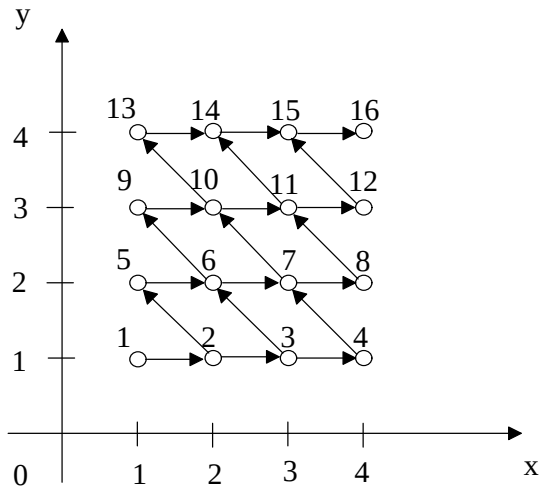


図 2: グラフ G

(g) グラフ G における単純道の長さの最大値を求めよ。また、このグラフ G に閉路があるかどうか答えよ (6 点)。

(解答)

最長の単純道の長さは、9 である。

これを示すため、(x, y) という座標の点に対して $val((x, y)) = x + 2y$ という量を割り当てる関数を考える。すると、G のすべての辺に対して、$val(\text{始点}) + 1 = val(\text{終点})$ となっていることがわかる。例えば、$(3, 2)$ から $(4, 2)$ への辺があるが、$val((3, 2)) = 7$ かつ $val((4, 2)) = 8$ である。また、$(3, 2)$ から $(2, 3)$ への辺があるが、$val((3, 2)) = 7$ かつ $val((2, 3)) = 8$ である。

従って、長さ k の道があるためには $val(v) + k = val(w)$ となる点 v, w が存在しなければならない。ところで、G の頂点に対する $val(v)$ の最小値は $val((1, 1)) = 3$ で、最大値は $val((4, 4)) = 12$ であるので、G に存在する道の長さ k の最大値は 9 以下である。

G には、実際に、$\langle 1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 14, 15, 16 \rangle$ という長さ 9 の単純道があるので、最長の単純道の長さは 9 である。(他にも長さ 9 の単純道はある。)

また、グラフ G に閉路はない。

なぜなら、上の議論にあるように、G の辺はすべて $val(x, y)$ の値を増加させるので、閉路を持つことはできないから。

(h) グラフ G の部分グラフ G_{sub} を、次のように作成する。

- 集合 B から、3 個の要素を取り出す。
- G_{sub} の頂点は、G の頂点のうち、そのラベルがこれら 3 個の値になるものとする。たとえば、B の要素 5 を取りだしたなら、$(1,2)$ が G_{sub} の頂点になる。
- G_{sub} の辺は、G の辺のうち G_{sub} の頂点同士を結ぶもの。

最初のステップでの B の要素の取り出し方により、異なる G_{sub} が得られる。このような部分グラフ G_{sub} を 2 回作成するとき、この 2 つの部分グラフは同型であるか否か、理由と共に示せ (8 点)。

(解答)

同型のこともあるし、同型でないこともある (同型とは限らない)。

まず、2 つのグラフが同型であることの定義を述べる。

グラフ $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ が同型であるとは、

$$\forall u \in V_1\ \forall v \in V_1\ \Big(\langle u, v \rangle \in E_1 \ \Leftrightarrow\ \langle f(u), f(v) \rangle \in E_2 \Big)$$

を満たす全単射 $f : V_1 \to V_2$ が存在することである。

まず、同型である選び方の例として、頂点 $(2,1), (3,1), (4,1)$ を選んだときの部分グラフ G_1 と、頂点 $(2,1), (1,2), (2,2)$ を選んだときの部分グラフ G_2 をあげる。G_1 を図 3 に、G_2 を図 4 に示した。 この

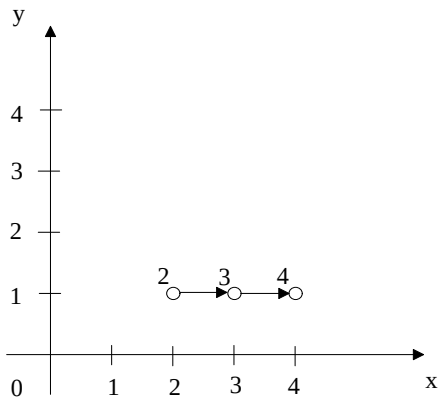


図 3: グラフ G_1

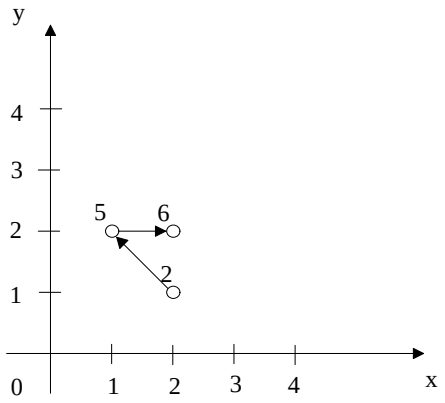


図 4: グラフ G_2

場合、点 $(2,1)$ を点 $(2,1)$ に、点 $(3,1)$ を点 $(1,2)$ に、点 $(4,1)$ を点 $(2,2)$ に写像する全単射を f とすれば、図 4 のグラフの辺が得られるため、図 3 のグラフ G_1 と図 4 のグラフ G_2 は同型である。

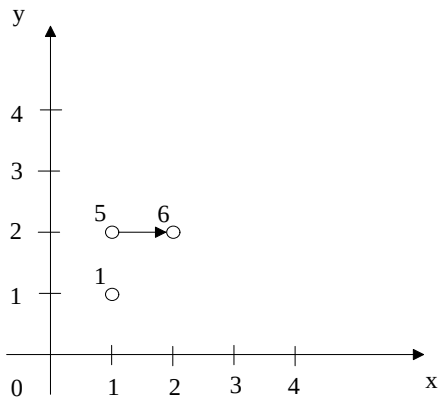


図 5: グラフ G_{sub} の例 3

一方、同型でない例として、例えば、上記の G_1 と頂点 $(1,1),(1,2),(2,2)$ を選んだときの部分グラフ G_3 をあげる。後者のグラフ G_3 は図 5 のグラフとなるが、このグラフには辺が 1 つしかない。従って、G_1 と G_3 は同型でない。

なお、G_1 と G_3 のグラフが同型でない理由をもう少し詳しく説明するため、仮にこれらが同型であるとする。すると、上記の同型性の定義における f という全単射が、G_1 の頂点集合から G_3 の頂点集合に対して存在する。

G_1 の頂点 $(2,1)$ と $(3,1)$ の間には辺があるので、f は、これらの頂点を、それぞれ G_3 の頂点 $(1,2)$ と $(2,2)$ に対応付けなければならない。同様に、G_1 の頂点 $(3,1)$ と $(4,1)$ の間には辺があるので、f は、これらの頂点を、それぞれ G_3 の頂点 $(1,2)$ と $(2,2)$ に対応付けなければならない。しかし、f は関数なので、G_1 の頂点 $(3,1)$ を、G_3 の頂点 $(2,2)$ と $(1,2)$ の両方に対応付けることはできず、矛盾である。

以上から、G_1 と G_3 が同型であるとの仮定から矛盾が得られたので、これらは同型でない。