# 第2章　集合

何らかのデータに対する理論を展開するとき，データの集まりを考えると便利である．集合 (set) は,「データの集まり」のことである．

この章では，集合を $A, B, C$ などの記号であらわす．集合に入っている「もの」を, その集合の要素 (element) という．また，元 (げん) ということもある．$a$ が集合 $A$ の要素であることを, $a \in A$ と書く．$a$ が集合 $A$ の要素でないことを, $a \notin A$ と書く．左右を逆にして，$A \ni a$ や $A \not\ni a$ と書くこともある．

**例 19** 自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする．$3 \in \mathcal{N}$, $-2 \notin \mathcal{N}$

## 2.1　集合の構成と表現

### 2.1.1　要素を一つ一つ書き並べる方法

有限個の要素を持つ集合 (有限集合) の場合，要素を全て書き並べることで集合を定めることができる．

**例 20**

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{5, 2, 1, 3, 4\}$
$\{1, 1, 1\}$
$\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$

要素が 1 つもない集合は空集合 (empty set) とよばれ，$\phi$ もしくは $\{\}$ と表される．

なお，無限集合に対しても同様の表現を使うことがあるが，これはあくまで読み手の直感に訴える便宜上のものであり，数学的に厳密な定義ではない．

厳密な定義でない例: $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

自然数の集合を厳密に構成する方法は後の帰納的定義の章で説明するが，さしあたり，この章では，例を記述する際には，$\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ を，それぞれ，自然数の集合 (0 を含む)，整数の集合，有理数の集合，実数の集合を表す記号とする．

### 2.1.2　要素が満たすべき性質から集合を作る方法—内包的な表現

$A$ が集合であるとき，ある性質を満たす $A$ の要素を全て集めた集合を作ることができる．ここで,「ある性質」は命題で記述する．$P(x)$ を満たす $x \in A$ を全て集めた集合は以下のように表記する．

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

たとえば，$\{x \in \mathcal{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ は，$[0, 1]$ 区間 (0 以上 1 以下の実数の集合) を表す．

$S = \{x \in A \mid P(x)\}$ とするとき，$x \in S$ と $x \in A \wedge P(x)$ は同値である．すなわち，$(x \in S) \Leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))$ が成立する．

**注意:** 同じ集合が何通りもの方法で表現されることがある．たとえば，$\{1,2,3\}$ と $\{1,1,2,3,2\}$ と $\{x \in \mathcal{N} \mid 1 \le x \le 3\}$ とはすべて同じ集合を表現する．このことは，後で集合同士の等しさを定義するときに明らかになる．

### 2.1.3 内包的な表現の発展

集合の内包的な表現には，様々な変種 (バリエーション) がある．

$\{x \in A \mid P(x)\}$ を，$\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$ や $\{x \mid P(x) \wedge x \in A\}$ と書くことがある．また，$x \in A$ が前後の文脈から明らかなときは省略することがある[1]．たとえば，実数について記述していることが明らかなときは，$[0,1]$ 区間を $\{x \mid 0 \le x \ \wedge \ x \le 1\}$ と書くことがある．

また，$\mid$ の左側に，変数以外の式を書くことがある．たとえば，$\{e \mid P(x)\}$ は，$\{y \mid \exists x.(y = e \wedge P(x))\}$ という集合を表す．

**例 21** 偶数の集合，奇数の集合は，それぞれ $\{2k \mid k \in \mathcal{Z}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathcal{Z}\}$ と表される．

内包的表記 $\{x \mid P(x)\}$ を用いるとき，命題 $P(x)$ に $x$ 以外の変数が現れることがあるが，その場合は存在記号を補って考える．

**例 22** 集合 $\{x \mid x = y^2 \wedge y \in \mathcal{N}\}$ は $\{x \mid \exists y(x = y^2 \wedge y \in \mathcal{N})\}$ のことである．

## 2.2 集合の等しさ

集合 $A$ と集合 $B$ は次の命題が成立するとき等しいといい, $A = B$ と書く．

$$\forall x \ (x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B)$$

すなわち，$A$ のすべての要素が $B$ の要素であり, $B$ のすべての要素が $A$ の要素であるとき $A$ と $B$ は集合として等しい．

この定義から，集合の表記においては，要素を並べる順番や要素の重複は気にしなくて良いことがわかる．

**例 23**

- $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$
- $\{1,1,2,3\} = \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} = \{1,2,2\} = \{1,1,2\} = \{1,2,1,2\}$
- $\{1,2\} = \{x \mid x = 1 \vee x = 2\}$
- $\phi = \{x \mid x = x + 1\}$

集合 $A$ と集合 $B$ が等しくないとき $A \ne B$ と表す. 例えば，$\{1,2,3\} \ne \{1,2\}$.

[1] これはあくまで省略であって，常に $x \in A$ を補って考えなければいけない．$x \in A$ となる $A$ がない場合，つまり，$\{x \mid P(x)\}$ という集合を作る原理からは，Russell の逆理 (パラドックス) とよばれる矛盾をひきおこすことが知られている．

## 2.3　集合の包含関係

集合 $A$ が集合 $B$ に含まれるとは，次の命題が成立することであり，このことを $A \subset B$ とあらわす．また，$B \supset A$ と書くこともある．

$$\forall x\ (x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B)$$

これは，$A$ のすべての要素が $B$ の要素になっていることを意味している．このとき $A$ は $B$ の部分集合 (subset) であるという．

$A = B$ は，$A \subset B \wedge B \subset A$ と同値である．

**例 24**

$\{a\} \subset \{a, b\}$

$\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$

## 2.4　集合に関する証明法

### 2.4.1　$A \subset B$ の証明法

任意の $x \in A$ が $x \in B$ であることを示せばよい．

**例 25** `Prime`$(x)$ を「$x$ は素数 (prime number) である」ことを表す命題とする．$A = \{x \mid$ `Prime`$(x) \wedge 42 \leq x \leq 51\}$, $B = \{x \mid x = 4k + 3 \wedge k \in \mathcal{N}\}$ のとき，$A \subset B$ を証明する．

$a \in A$ とすると，$a = 43 \vee a = 47$ である．
$a = 43$ のとき,
$a = 4 \times 10 + 3, 10 \in \mathcal{N}$ であるから $a \in B$
$a = 47$ のとき,
$a = 4 \times 11 + 3, 11 \in \mathcal{N}$ であるから $a \in B$
したがって, $A \subset B$ である．

### 2.4.2　$A \not\subset B$ の証明法

$A \subset B$ が成立しないことを $A \not\subset B$ と書く．これを証明するには，$x \in A$ であって $x \notin B$ である $x$ を見出せばよい．

**例 26** $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathcal{N}\}$, $B = \{4k + 1 \mid k \in \mathcal{N}\}$ のとき, $A \not\subset B$ かつ $B \not\subset A$ を証明する

$4 \in A$ かつ $4 \notin B$
$5 \in B$ かつ $5 \notin A$

### 2.4.3　$A = B$ の証明法

$A \subset B$ かつ $B \subset A$ を示す．

**例 27** $A = \{x \mid x$ は素数かつ $12 \leq x \leq 18\}$, $B = \{x \mid \exists k \in \{3, 4\}\ x = 4k + 1\}$ の時, $A = B$ を示す．

$A \subset B$ を示す．$x \in A \wedge (x = 13 \vee x = 17)$ である．$13 = 4 \times 3 + 1, 17 = 4 \times 4 + 1$
$B \subset A$ を示す．$x \in B, x = 4 \times 3 + 1$ か $x = 4 \times 4 + 1$ いずれも素数で, $12 \leq x \leq 18$ を満たす.
従って, $A = B$

### 2.4.4 鳩の巣原理 (Pigeon hole principle) (†)

有限集合に対する証明技法に鳩の巣原理と呼ばれるものがある．$n$ 個の箱に $m$ 個の手紙が配達されているとする．$m > n$ とすると少なくとも 1 つの箱には 2 つ以上の手紙が配達されることがわかる，という原理である．

**例 28** 集団が 367 人からなるとき，その中には同じ誕生日を持つ人が少なくとも 1 組はいる．

**例 29** 1 以上 $2n$ 以下の整数の集合の中から $n+1$ 個の整数を取ってくると，その中に必ず，片方が他方を割り切るものがある．

これを示すために，まず，$B = \{k \in \mathcal{N} \mid 1 \leq k \leq 2n\}$ とする．また，$1 \leq k < 2n$ なる奇数 $k$ に対して，$A_k = \{k \cdot 2^a \mid (0 \leq a) \ \wedge \ (k \cdot 2^a \leq 2n)\}$ とする．このような $A_k$ は $k$ が 1 以上 $2n$ 未満の奇数であるためちょうど $n$ 個である．また，$B = A_1 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{2n-1}$ である．したがって，集合 $B$ から $n+1$ 個の要素を取ってくると，必ず，ある $A_k$ から 2 個以上の要素を取ってくることになる．同じ $A_k$ に属する 2 つの数は必ず一方が他方を割り切るので，そのような整数の組が見つかった．

## 2.5 集合の演算

集合の構成方法の 3 番目として，既にある集合から演算を行って集合を作る方法がある．集合上の演算の主なものには,「べき集合」「和集合」「共通部分」「差集合」「補集合」「直積」がある．

### 2.5.1 べき集合

集合 $A$ のべき集合 (power set) とは，$A$ の部分集合をすべて集めた集合のことである．これを，$2^A$ や $\mathcal{P}(A)$ と表記する．すなわち，以下の命題が成立する．

$$\forall x. \ (x \in 2^A \Leftrightarrow x \subset A)$$

この式に現れる $x$ 自身がまた集合であることに注意せよ．

**例 30** $A = \{a, b, c\}$ とすると

$$2^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

### 2.5.2 和集合と共通部分

2 つの集合の和集合と共通部分をあらわす集合を表す記号は以下の通りである．

| | |
|---|---|
| $\cup$ | 和集合 (結び, union) |
| $\cap$ | 共通部分 (交わり, intersection) |

すなわち，$A, B$ が集合であるとき，$A \cup B$ と $A \cap B$ は，それぞれ，和集合と共通部分を表す集合である．

これらの集合は以下の性質を満たす．

$\forall x.(x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))$
$\forall x.(x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$

**例 31** $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}$ とすると，
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
$A \cap B = \{2\}$

#### 和集合の性質

(a) $A \cup \phi = A$

(b) $A \cup B = B \cup A$ (交換法則)

(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (結合法則)

(d) $A \cup A = A$ (べき等法則)

(e) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

(e) の証明

(1) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ を証明する．
$A \subset B$ と仮定する．

  (a) ($A \cup B \subset B$ を示す)
  $x \in A \cup B$ とすると $x \in A \vee x \in B$ である．
  $x \in A$ ならば, $A \subset B$ より $x \in B$
  したがっていずれにしても $x \in B$ である．

  (b) ($B \subset A \cup B$ を示す)
  $x \in B$ とすると $x \in A \vee x \in B$ である．
  よって $x \in A \cup B$ である．

(2) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ を証明する．
$x \in A$ とすると上と同様の推論により $x \in A \cup B$ である．
$A \cup B = B$ より $x \in B$ である．

#### 共通部分の性質

(a) $A \cap \phi = \phi$

(b) $A \cap B = B \cap A$ (交換法則)

(c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (結合法則)

(d) $A \cap A = A$ (べき等法則)

(e) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

#### 分配法則

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

### 2.5.3 差集合

集合 $A$ と集合 $B$ の差集合を $A - B$ と表記する．これは以下の性質を満たす集合である．

$$\forall x.(x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$$

**例 32** $A = \{a, b, c\}, B = \{c, d\}$ とすると $A - B = \{a, b\}$

なお，集合における演算は数の上の演算と異なり,「和」と「差」は逆演算とはならない．たとえば，$(A \cup B) - B = A$ や $(A - B) \cup B = A$ は必ずしも成立しない．

### 2.5.4 補集合 (†)

考察の対象としているものの全体の集合が 1 つに定まっているとき，それを全体集合という．たとえば，整数についての議論をしているときは整数全体の集合 $\mathcal{N}$が全体集合である．

全体集合$U$の中で集合$A$を考えているとき, $A$に属さない要素の集合を A の補集合 (complement) といい, $\overline{A}$ で表す．補集合は，集合の差の記号を使って，$\overline{A} = U - A$ と表現することができる．すなわち，以下の命題が成立する．

$$\forall x.(x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A)$$

ただし，この式において，$\forall x$ の $x$ が動く範囲は全体集合 $U$ である．

#### 補集合の性質

(a) $\overline{\overline{A}} = A$

(b) $\overline{\phi} = U, \quad \overline{U} = \phi$

(c) $A \cap \overline{A} = \phi, \quad A \cup \overline{A} = U$

(d) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ド・モルガンの法則)

(d) の証明

$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ の証明
$x \in \overline{B}$ とすると $x \notin B$ である．ここで $x \notin \overline{A}$ と仮定する．すなわち，$x \in A$
$A \subset B$ より $x \in B$ なので，矛盾する．
したがって，$x \in \overline{A}$ である．

$\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$ の証明
$x \in A$ とする．$x \notin B$ とすると (すなわち $x \in \overline{B}$), $\overline{B} \subset \overline{A}$ より, $x \in \overline{A}$. ここで, $x \notin A$ となり, 矛盾. したがって, $x \in B$. すなわち $A \subset B$.

### 2.5.5 組と直積集合

組 (タプル，tuple) とは，有限個の「もの」を一列に並べたものである．ここでは，組を $\langle 1, 2, 3 \rangle$ のようにあらわす．組は集合と異なり，要素の重複，要素の順序が意味を持つ．

**例 33**

- $\langle 0 \rangle$ ... 0 だけからなる組
- $\langle 0, 1, 1 \rangle$ ... 3 個の要素からなる組 ($\langle 0, 1 \rangle$ とは異なる)
- $\langle 0, 1, 1, 1, 2 \rangle$. ... 5 個の要素からなる組 ($\langle 2, 1, 1, 0, 1 \rangle$ とは異なる組である．)
- $\langle \rangle$ （0 個の要素からなる組）.

長さが 2 の組を，対 (つい，pair) という．組 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ に対して, $x_i$ を $i$ 番目の要素という.

集合 $A$ と $B$ の直積集合 (cartesian product) $A \times B$ は以下の性質を見たす集合である.

$$\forall z.((z \in A \times B) \Leftrightarrow \exists x \ \exists y \ ((z = \langle x, y \rangle) \wedge (x \in A) \wedge (y \in B)))$$

この定義は，やや複雑だが，以下のように書きかえると理解しやすい.

$$\forall v \ \forall w \ (\langle v, w \rangle \in A \times B \Leftrightarrow (v \in A \wedge w \in B))$$

**例 34** $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ とする.

$$A \times B = \{\langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$$

$$\emptyset \times B = B \times \emptyset = \emptyset$$

集合 $A_1, \ldots, A_n$ の直積は, 下のように定義される.

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$$

集合 $A$ の $n$ 個の直積 $\overbrace{A \times \cdots \times A}^{n}$ を $A^n$ と書く.

$$A^0 = \{\langle \rangle\}(\text{これは } \emptyset \text{ とは異なる})$$

$$A^1 = \{\langle a \rangle \mid a \in A\}$$

**例 35** $A = \{0, 1\}$ とする.

$$A^0 = \{\langle \rangle\}$$

$$A^1 = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$$

$$A^2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

$A^1$ が $A$ と等しくないことに注意せよ[2].

[2] ただし，文献によっては，$A^1 = A$ として定義することもある.

## 2.6 可算集合と対角線論法 (†)

コンピュータは，真の無限をそのまま扱うことはできないが，有限的な要素の極限としての無限は，コンピュータ科学にとって必要な概念である．有限集合の極限としての無限は，可算無限と呼ばれ，それより大きな無限 (非可算無限) とは区別される．

集合 $A$ が数え挙げられる (列挙できる, denumerable) とは，$A$ の全ての要素を，1 番目，2 番目，3 番目，$\cdots$ という (有限もしくは無限の) 列として列挙できる[3]ということである．この列に $A$ の要素が 2 回以上現れてもよいが，$A$ の要素はすべてこの列に現れなければならない．

**例 36** 有限集合，自然数の集合 $\mathcal{N}$は列挙できる．自然数の集合の任意の部分集合は列挙できる．

整数の集合 $\mathcal{Z}$は列挙できる．なぜなら，$0, 1, -1, 2, -2, \cdots$ という列で数え挙げられるから．

C 言語で書かれたコンピュータプログラムを全て集めてきた集合 (過去に書かれたものだけでなく，C のプログラムと見なされるもの全てを集めた集合) は，列挙できる．なぜなら，コンピュータプログラムは記号列であり，その中に含まれる記号を，ASCII コードなどの符号化により bit 列として表現すれば，全体として (非常に大きな)1 つの自然数と見なすことができるから．この場合，C 言語のプログラムの集合全体は，自然数の集合の部分集合となる (自然数の中には，その bit 列の表現が，C 言語のプログラムになっていないものもある)．

**定義 1**

- 集合 $A$ が数え挙げられるとき，$A$ を可算集合 (countable set) という．
- 有限集合でない可算集合を可算無限集合という．
- 可算でない集合を, 非可算 (uncountable) 集合という．

**例 37** 有限集合および自然数の集合 $\mathcal{N}$は順番をつけて列挙できるので可算集合である．

**例 38** 正の有理数の集合 $\{x \in \mathcal{Q} \mid 0 < x\}$ は可算集合である．

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

というように数え挙げればよい. (同じ有理数が 2 回以上現れるが，数え上げにおいては，2 回以上現れてもよいので問題ない．)

**例 39** 可算個の可算集合に対して，それらの和集合は可算集合である．

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

とした時, $A_0, A_1, \cdots$ を以下のようにすれば,

$$
\begin{array}{llll}
A_0 = & a_{00}, & a_{01} & a_{02} \quad \cdots \\
A_1 = & a_{10}, & a_{11} & \cdots \\
A_2 = & a_{20}, & \cdots & \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

[3] 正確には，$A$ が空集合であるか，または，$\mathcal{N} \rightarrow A$ となる全射が存在する，という条件となる.「全射」については，後の関数の章を参照のこと．

$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, \cdots$ というように対角線にしたがって数え挙げることができる．よって，$A$ は可算集合[4]．

正の有理数の集合が可算であることと同様に負の有理数の集合が可算であることが導ける．それらと上記の例を合わせると，有理数全体の集合 $\mathcal{Q}$が可算であることがわかる．

一方，非可算集合も存在する．ここでは，例として，自然数の集合のべき集合 $2^{\mathcal{N}}$ が非可算であることを示す．

**定理 1** $2^{\mathcal{N}}$ は非可算である．

**証明**

$T = 2^{\mathcal{N}}$ とおく．$T$ が可算であると仮定して矛盾を導くことにする．

可算の定義より, $T$ の要素は, $S_0, S_1, \cdots, S_n, \cdots$ と数え挙げられる．ここで，以下のような集合 $V$ を作る．

$$V = \{n \in \mathcal{N} \mid n \notin S_n\}$$

$V$ は確かに集合であり，$V \subset \mathcal{N}$ であるので，$V \in T$ である．従って，$V$ は $S_0, S_1, \cdots$ の列に現れる．そこで，$V = S_k$ とする．すると，

$$\begin{aligned} k \in V \quad &\Leftrightarrow \quad k \notin S_k \\ &\Leftrightarrow \quad k \notin V \end{aligned}$$

となる．これは，$k \in V$ とその否定が同値であることになり，矛盾である．

したがって，最初の仮定である「$T$ が可算である」が否定され，$T$ が非可算であることがわかった．

この証明で用いた証明技法は，対角線論法とも呼ばれ，広い範囲で応用される方法である．

なお，この定理の応用として，実数の集合 $\mathcal{R}$も非可算であることがいえる．実数の定義を数学的に与えることはこのテキストの範囲を越えるので，ここでは，$\mathcal{R}$が非可算であることの直感的な説明を与えるのみとする．

集合 $2^{\mathcal{N}}$ は，以下の対応により実数の集合 $\mathcal{R}$に埋め込むことができる．

任意の $A \in 2^{\mathcal{N}}$ に対して，

$$0.d_0\ 0\ d_1\ 0\ d_2\ 0 \cdots$$

という 2 進数表記の実数を対応付ける[5]．ただし，$d_i$ は $A$ に応じて以下のように定める数字 (0 または 1 となる数字) である．

$$d_i = \begin{cases} 1 & i \in A \text{ のとき} \\ 0 & i \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

たとえば，偶数の集合には，

$$0.1000100010001000 \cdots$$

という実数が対応付けられ，奇数の集合には，

$$0.0010001000100010 \cdots$$

[4]ここに書いたものは証明ではなく，証明のアイディアに過ぎない．読者は自力で厳密な証明を完成してほしい．

[5]ここで小数点以下を $d_0 d_1 ...$ とせず，1 桁おきに 0 をはさんでいるのは，$S$ ごとに異なる実数を対応付けたいからである．

という実数が対応付けられる．

このようにすると，$A, B \in 2^{\mathcal{N}}$ なる集合 $A, B$ が異なれば，異なる実数が対応付けられることがわかる．したがって，もし，実数の集合 $\mathcal{R}$が列挙できれば，$2^{\mathcal{N}}$ も列挙でき，前述の定理と矛盾する．よって，実数の集合 $\mathcal{R}$ は可算でない．

コンピュータ上で表現可能なプログラムやデータが可算であるという事実と，$\mathcal{R}$が可算でないという事実から，全ての実数をそのままコンピュータ上で操作可能なデータとして表現することはできないことがわかる．