

離散構造 中間試験

2006 年 1 月 27 日 (金)

問 3 (関数) (合計 35 点)

集合 $A = \{\text{りんご}, \text{みかん}, \text{ばなな}, \text{かき}, \text{なし}, \text{ぶどう}, \text{いちご}\}$ の部分集合 $A_1 = \{\text{りんご}, \text{ばなな}, \text{かき}\}$, $A_2 = \{\text{みかん}, \text{ぶどう}\}$, $A_3 = \{\text{かき}, \text{なし}, \text{ぶどう}\}$ と、集合 $B = \{\text{好き}, \text{嫌い}, \text{どちらでもない}\}$ の部分集合 $B_1 = \{\text{好き}, \text{嫌い}\}$, $B_2 = \{\text{好き}, \text{嫌い}, \text{どちらでもない}\}$ に対して、以下の問いに答えよ。

- (a) 関数 $f: A_1 \rightarrow B_1$ が図 1 のように定められているとき、この関数は全射であるか？ (5 点)

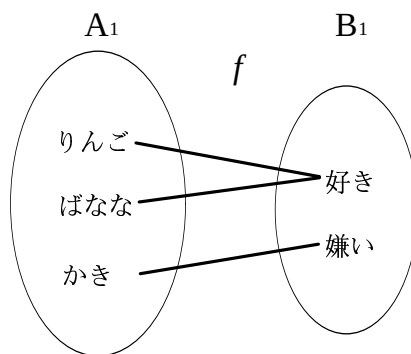


図 1: 関数 $f: A_1 \rightarrow B_1$

- (b) 関数 $g: A_2 \rightarrow B_1$ が図 2 のように定められているとき、この関数は単射であるか？ (5 点)

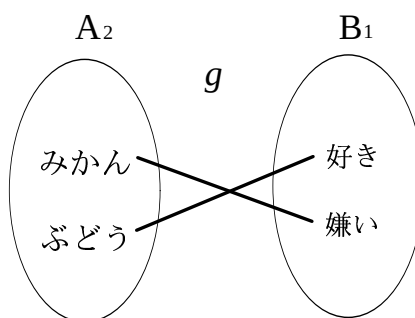


図 2: 関数 $g: A_2 \rightarrow B_1$

- (c) 図 1, 2 に示した 2 つの関数について、全単射となるものがあれば、全て列挙せよ。 (5 点)
- (d) 集合 A_1 から集合 B_2 への関数を全て集めてきたとき、その中に単射となる関数が存在するか否かを、その理由と共に示せ。 (5 点)
- (e) $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$ としたとき、集合 A_i から集合 B_j への全ての関数の中に全単射となる関数が存在する i と j の組 $\langle i, j \rangle$ を全て示せ。 (5 点)
- (f) いちごは A_1, A_2, A_3 のいずれにも属していないため、 A_i に所属させるか否かを $i \in \{1, 2, 3\}$ のおのについて決めることとする。 $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して、 H_{i1} を集合 A_i から集合 B_1 への関数の集合、 H_{i2} を集合 A_i から集合 B_2 への関数の集合とし、これらの集合を要素とする集合 $S_1 = \{H_{i1} | i \in \{1, 2, 3\}\}$ と集合 $S_2 = \{H_{i2} | i \in \{1, 2, 3\}\}$ を定義する。更に、関数を要素とする集合において、全単射でない関数のみが要素となっているとき、その集合を非全単射関数族と呼ぶことにする (例えば、もし、 H_{11} に全単射となる関数が含まれていないならば、 H_{11} は非全単射関数族である)。このとき、 S_2 の方が S_1 よりも、非全単射関数族を多く要素とするのは、 A_1, A_2, A_3 へのいちごの所属をどのように決めたときかを理由と共に示せ。 (10 点)