

問 3 (帰納) (合計 35 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ と書き、また、 $0 \in \mathcal{N}$ とする .

自然数のリストの集合 $List_{\mathcal{N}}$ を次のように帰納的に定義する .

- $\langle \rangle \in List_{\mathcal{N}}$.
- $(n \in \mathcal{N} \wedge x \in List_{\mathcal{N}}) \Rightarrow \text{cons}(n, x) \in List_{\mathcal{N}}$.

また , 関数 $f : List_{\mathcal{N}} \times List_{\mathcal{N}} \rightarrow List_{\mathcal{N}}$ を次のように帰納的に定義する .

$$f(x, y) = \begin{cases} y & (x = \langle \rangle \text{ のとき}) \\ f(z, \text{cons}(n, y)) & (x = \text{cons}(n, z) \text{ のとき}) \end{cases}$$

また , a, b, c が自然数のとき , $\text{cons}(a, \text{cons}(b, \text{cons}(c, \langle \rangle)))$ を , $\langle a, b, c \rangle$ と略記する .

(3-a) (配点 8 点) $\langle 1, 2, 3 \rangle \in List_{\mathcal{N}}$ であるかどうかを理由をつけて答えなさい . また , $\langle \langle 1, 2, 3 \rangle, 2, 3 \rangle \in List_{\mathcal{N}}$ であるかどうかを理由をつけて答えなさい .

(3-b) (配点 7 点) $f(\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle \rangle)$ の値を計算しなさい . ただし , 計算の過程も示すこと .

また , $g(x) = f(x, \langle \rangle)$ と定義するとき , g は何を計算する関数か , 言葉で答えなさい . (理由を詳細に説明する必要はない .)

(3-c) (配点 10 点) 自然数のリストが与えられたとき , そのリストに含まれる自然数の 2 乗の和を返す関数 $h : List_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$ を定義しなさい . たとえば , $h(\langle 1, 3, 5 \rangle) = 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$ である .

(3-d) (配点 10 点) f と h を上記の関数とする . すべての $x \in List_{\mathcal{N}}$ とすべての $y \in List_{\mathcal{N}}$ に対して , $h(f(x, y)) = h(x) + h(y)$ であることを x に関する帰納法 (リストに関する帰納法) を用いて証明しなさい .