離散構造 期末試験

2006 年 3 月 3 日 (金)

答案用紙は 2 枚である．それぞれに，学籍番号と氏名を記入すること．紺色の答案用紙に問 1 と問 2 の解答を記入し，青色（薄い青）の答案用紙に問 3 の解答を記入せよ．

答案用紙の裏面を使用してもよい．解答の記入にあたっては，問題番号 (「問 1 (a)」など) を明記せよ．

問 1 (関係) (合計 32 点)

サッカーの 2006 年ワールドカップ大会のグループ F は、Australia, Brazil, Croatia, Japan の 4 か国からなり、これらの国は 1 回ずつ総当り形式で対戦する。たとえば、Japan は、Brazil, Croatia, Australia と 1 回ずつ対戦する。この 4 か国の集合を A とする。A 上の二項関係 R, S, T を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
xRy &\iff (x \text{ と } y \text{ が対戦する}) \\
xSy &\iff (x \text{ の頭文字が } y \text{ の頭文字よりアルファベット順で前であるか同じである}) \\
xTy &\iff (x \text{ の頭文字が } y \text{ の頭文字よりアルファベット順で前である})
\end{aligned}
$$

(a) 以下の表を答案用紙に記し、R と S に関して、表の上段のそれぞれの性質が成立するとき○を、成立しないとき×を付けて表を埋めよ (12 点)。

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的	順序 (半順序)	全順序
R						
S						

(b) 以下の表を答案用紙に記し、表の左側の組が、合成関係 $R \circ T$ および合成関係 $T \circ R$ に属する場合は○を、属さない場合は×を付けて表を埋めよ (4 点)。

$\langle x, y \rangle$	$x(R \circ T)y$ か？	$x(T \circ R)y$ か？
$\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$		
$\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$		

(c) グループ F における総当たりの対戦が終了したとする。A 上の二項関係 U, V を、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
xUy &\iff (x \text{ が } y \text{ に勝った}) \\
xVy &\iff (x \text{ と } y \text{ が引き分けた})
\end{aligned}
$$

と定義する。U や V は、実際の試合結果により、異なる二項関係となる。以下の表を答案用紙に記述した上で、U や V としてあり得る二項関係の中に、表の上段のそれぞれの性質を満たす二項関係が存在するとき○を、存在しないとき×を付けて表を埋めよ (16 点)。

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的
U				
V				

問 2 (グラフ) (合計 33 点)

問 1 で考察した 2006 年ワールドカップ大会の決勝トーナメントは、 A, B, $\cdots$, H の 8 つのグループの上位 2 か国（合計 16 か国）が出場するトーナメント戦である。16 か国によるトーナメント戦とは、ベスト 16、準々決勝、準決勝、決勝と、勝ち残った国同士が対戦を繰り返して、1 位を決定する方法である。この決勝トーナメントを含む、2006 年ワールドカップ大会での対戦状況 (の一部) を、次の手順によりグラフとして表現する。

まず、グループ A の 1 位から 4 位の国に順番に 1, 2, 3, 4 を割当て、グループ B の 1 位から 4 位の国に 5, 6, 7, 8 を割り当てる。次に、無向グラフ $G = \langle V, E \rangle$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
V &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\
E &= \big\{\{x,y\} \mid x \in V \wedge y \in V \wedge (\text{グループ内の総当たり戦で国 } x \text{ と国 } y \text{ が対戦したか、} \\
&\quad \text{あるいは決勝トーナメントの 1 回戦で、国 } x \text{ と国 } y \text{ が対戦した})\big\}
\end{aligned}
$$

なお、「国 x」とは、x という数が割当てられた国を指す。また、決勝トーナメントの 1 回戦 (ベスト 16 での対戦) では、次のように対戦し、これら以外にグループ A, B に所属する国が関係する対戦はない。

グループ A の 1 位とグループ B の 2 位が対戦する
グループ B の 1 位とグループ A の 2 位が対戦する

(a) グラフ G を描け (5 点)。

(b) グラフ G において、頂点 3 と頂点 5 の次数をそれぞれ示せ（6 点)。

(c) グラフ G の位数とサイズをそれぞれ示せ（6 点)。

(d) グラフ G において、頂点 1 から頂点 8 への単純道の中で、$\langle 1, 6, \ldots \rangle$ と表現される単純道に注目する。このような単純道で頂点 2 を含むものが存在するか否かを理由と共に示せ（5 点)。

(e) グラフ G の部分グラフ $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ と $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \{1,2,3,4\} \\
E_2 &= \{\{x,y\} \in E \mid x \in V_2 \wedge y \in V_2\} \\
V_3 &= \{5,6,7,8\} \\
E_3 &= \{\{x,y\} \in E \mid x \in V_3 \wedge y \in V_3\}
\end{aligned}
$$

G_2 から辺 $\{1,2\}$ を取り除いて得られるグラフを G_2'、G_3 から辺 $\{5,7\}$ を取り除いて得られるグラフを G_3' とおくと、G_2' と G_3' は同型であるか否かを理由と共に示せ（6 点)。

(f) 問 (e) のグラフ G_2 から k 本の辺を取り除き、木を得た。このとき、k が取り得る値の最小値を示せ（5 点)。