

離散構造 中間試験

2006 年 1 月 27 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．それぞれに，学籍番号と氏名を記入すること．水色 (薄い青色) の解答用紙に問 1 と問 2 の解答を記入し，紺色 (濃い青色) の解答用紙に問 3 の解答を記入せよ．

解答用紙の裏面を使用してもよい．解答の記入にあたっては，問題番号 (「問 1 (a)」など) を明記せよ．

問 1 (論理)

基本命題 A, B を， $A = 「\sqrt{2}$ は有理数である .」， $B = 「\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数である .」 とし， P, Q, R を

- $P = 「\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数であるか，有理数でないかどうかだ .」
- $Q = 「\sqrt{2}$ が有理数でなく， $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数である .」
- $R = 「\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ はどちらも有理数でない .」

とする．(参考: $\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は実数であり，有理数とは分数の形で表現できる実数のことである．ただし，これらの知識は本問の解答に直接の関係はない．)

- (a) (配点 15 点) 上記の基本命題と論理記号を用いて， P, Q, R を表現しなさい．
- (b) (配点 15 点) 真理値表を書くことによって，命題 P と命題 $(\neg A) \Rightarrow (Q \vee R)$ が恒真式かどうか判定しなさい．また， C を基本命題とすると，命題 $((Q \Rightarrow C) \wedge (R \Rightarrow C)) \Rightarrow ((\neg A) \Rightarrow C)$ が恒真式かどうか判定しなさい．ただし，恒真式とは常に真となる命題である．
- (c) (配点 5 点) 命題 C を「 x と y が有理数でなく， x^y が有理数であるような x と y が存在する .」とする．このとき， $Q \Rightarrow C$ は正しい命題である．この理由を言葉で述べなさい．

問 2 (集合)

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とする．また， $\text{Even}(x)$ を「 x が偶数である」ことを意味する命題とし， $\text{Prime}(x)$ を「 x が素数である」ことを意味する命題とする．

- (a) (配点 15 点) 集合 S, T, U を次のように定義するとき， S, T, U のそれぞれの要素をすべて書きなさい．ただし， $\exists$ は「存在する」ことを意味する論理記号であり， 2^A は集合 A のべき集合である．

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathcal{N} \mid (3 \leq x < 18) \wedge \text{Even}(x)\} \\ T &= \{x \in S \mid \exists y (\text{Prime}(y) \wedge (x = 2y))\} \\ U &= 2^{(S-T)} \end{aligned}$$

- (b) (配点 15 点) 全ての集合 X, Y, Z に対して，次の命題 D, E がそれぞれ成立するかどうか答えなさい．成立する場合はその命題を証明し，成立しない場合は，その命題を満たさない具体的な X, Y, Z を 1 組あげなさい．

$$\text{命題 } D: (X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (Z \cup X) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z)$$

$$\text{命題 } E: (X \subset Y) \Rightarrow ((Z - Y) \subset (Z - X))$$