『離散構造』 期末試験 解答例

問 3 (帰納: 合計 35 点, (a) 8 点, (b) 7 点, (c) 10 点, (d) 10 点)

(3-a) 自然数のリストの集合 $List_{\mathcal{N}}$ を次のように帰納的に定義する．

- $\langle\ \rangle \in List_{\mathcal{N}}$ (これを「定義の第 1 節」と呼ぶことにする)
- $(n \in \mathcal{N} \wedge x \in List_{\mathcal{N}}) \Rightarrow \mathrm{cons}(n, x) \in List_{\mathcal{N}}$. (これを「定義の第 2 節」と呼ぶことにする)

問 (3-a) の 1 つ目: $\langle 1, 2, 3\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ であるかどうかを理由をつけて答えなさい．

答: $\langle 1, 2, 3\rangle = \mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\rangle)))$ である。

まず、定義第 1 節より $\langle\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ である。

これと $3 \in \mathcal{N}$ から、定義第 2 節より、$\mathrm{cons}(3, \langle\rangle) \in List_{\mathcal{N}}$ である。

これと $2 \in \mathcal{N}$ から定義第 2 節より $\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\rangle)) \in List_{\mathcal{N}}$ である。

さらに、これと $1 \in \mathcal{N}$ から定義第 2 節より $\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\rangle))) \in List_{\mathcal{N}}$ である。

問 (3-a) の 2 つ目: $\langle\langle 1, 2, 3\rangle, 2, 3\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ であるかどうかを理由をつけて答えなさい．

答: $\langle\langle 1, 2, 3\rangle, 2, 3\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ ではない。

このことを示すため、$\langle\langle 1, 2, 3\rangle, 2, 3\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ と仮定して矛盾することを示す。

$\langle\langle 1, 2, 3\rangle, 2, 3\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ であるとすると、このことを帰納的定義に沿って導く過程の最後で、定義第 1 節か定義第 2 節を使ったはずである。

最後に第 1 節を用いたとすると、$\langle\langle 1, 2, 3\rangle, 2, 3\rangle = \langle\ \rangle$ でなければいけないが、そうではない。

最後に第 2 節を用いたとすると、$\langle 1, 2, 3\rangle \in \mathcal{N} \wedge \langle 2, 3\rangle \in List_{\mathcal{N}}$ が成立しなければならない。しかし、$\langle 1, 2, 3\rangle \in \mathcal{N}$ ではないので、これは矛盾である。

(3-b) 関数 $f : List_{\mathcal{N}} \times List_{\mathcal{N}} \to List_{\mathcal{N}}$ を次のように帰納的に定義する．

$$f(x, y) = \begin{cases} \langle\ \rangle & (x = \langle\ \rangle \text{ のとき}) \\ f(z, \mathrm{cons}(n, y)) & (x = \mathrm{cons}(n, z) \text{ のとき}) \end{cases}$$

問 (3-b) の 1 つ目: $f(\langle 1, 2, 3\rangle, \langle\ \rangle)$ の値を計算しなさい．ただし，計算の過程も示すこと．

答: 以下の通り。

$$\begin{aligned} f(\langle 1, 2, 3\rangle, \langle\ \rangle) &= f(\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle)))), \langle\ \rangle) \\ &= f(\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle)), \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle)) \\ &= f(\mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle), \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))) \\ &= f(\langle\ \rangle, \mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle)))) \\ &= \mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))) \\ &= \langle 3, 2, 1\rangle \end{aligned}$$

問 (3-b) の 2 つ目: $g(x) = f(x, \langle\ \rangle)$ と定義するとき，g は何を計算する関数か，言葉で答えなさい．

答: f は第一引数として与えられた自然数のリストの先頭の要素から順番に、第二引数のリストに蓄積する関数である。このとき、第二引数には逆順に要素が蓄積される。$g(x) = h(x, \langle\ \rangle)$ なので、結局、x を逆順に並べたリストを返す関数である。(reverse 関数)。

問 (3-c): 自然数のリストが与えられたとき，そのリストに含まれる自然数の 2 乗の和を返す関数 $h : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を定義しなさい．たとえば，$h(\langle 1, 3, 5\rangle) = 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$ である．

答: h の定義は一通りではないが、一例は以下の通りである。

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (x = \langle\ \rangle \text{ のとき}) \\ h(y) + n^2 & (x = \mathrm{cons}(n, y) \text{ のとき}) \end{cases}$$

計算の例: $h(\langle 1, 3, 5\rangle) = h(\langle 3, 5\rangle) + 1^2 = h(\langle 5\rangle) + 3^2 + 1^2 = h(\langle\ \rangle) + 5^2 + 3^2 + 1^2 = 0 + 25 + 9 + 1 = 35.$

問 (3-d): f と h を上記の関数とする．すべての $x \in List_{\mathcal{N}}$ とすべての $y \in List_{\mathcal{N}}$ に対して，$h(f(x, y)) = h(x) + h(y)$ であることを x に関する帰納法 (リストに関する帰納法) を用いて証明しなさい。

答: x に関する帰納法 (自然数のリストの構成に関する帰納法) を用いて、次の命題を証明する。

$$\text{すべての } x \in List_{\mathcal{N}} \text{と、すべての } y \in List_{\mathcal{N}} \text{に対して } h(f(x, y)) = h(x) + h(y) \text{ である。}$$

このためには、以下の 2 つのことを証明すればよい。

- (帰納法の基礎, base case, $x = \langle\ \rangle$ のとき): すべての $y \in List_{\mathcal{N}}$ に対して $h(f(\langle\ \rangle, y)) = h(\langle\ \rangle) + h(y)$ である。
- (帰納法のステップ, induction step, $x = \mathrm{cons}(n, z)$ のとき) 「すべての $y \in List_{\mathcal{N}}$ に対して $h(f(z, y)) = h(z) + h(y)$)」ならば「すべての $y \in List_{\mathcal{N}}$ に対して $h(f(\mathrm{cons}(n, z), y)) = h(\mathrm{cons}(n, z)) + h(y))$ である。」

これらを順番に証明する。

(base case) 関数 f の定義より、$h(f(\langle\ \rangle, y)) = h(y)$ である。一方、関数 h の定義により、$h(\langle\rangle) + h(y) = 0 + h(y) = h(y)$ となり、両辺は等しい。

(induction step) 関数 f の定義より、$h(f(\mathrm{cons}(n, z), y)) = h(f(z, \mathrm{cons}(n, y)))$ である。

ここで、帰納法の仮定から、$h(f(z, \mathrm{cons}(n, y))) = h(z) + h(\mathrm{cons}(n, y))$ である。従って、証明したい式の左辺は、$h(f(\mathrm{cons}(n, z), y)) = h(z) + h(\mathrm{cons}(n, y)) = h(z) + (n^2 + h(y))$ となる。

一方、証明したい式の右辺は、h の定義より、$h(\mathrm{cons}(n, z)) + h(y) = h(z) + n^2 + h(y)$ となる。

以上から、どんな $y \in List_{\mathcal{N}}$ に対しても、両辺が一致することが言えた。

base case と induction step が示せたので、リストに関する帰納法により上記命題が示された。(証明終わり)

注釈: 実際の証明では、ここまで丁寧に書かなくてよい。「x に関する帰納法を使っている」ということを明示した上で、base case と step の証明が書いてあれば問題ない。

なお、帰納法の仮定が、

$$h(f(z, y)) = h(z) + h(y)$$

であると考える学生が多いと思われるが、厳密にはこれは間違いであり、

$$\forall y \in List_{\mathcal{N}}.\ h(f(z, y)) = h(z) + h(y)$$

が帰納法の仮定である。(そうでないと、帰納法のステップにおいて、y というパラメータが仮定と結論とで異なるので、帰納法の証明がうまくいかない。) しかしながら、今回の採点ではこの点は気にせず、上記の式を帰納法の仮定と考えても構わないことにする。(この点が気になった人は、厳密な推論について良いセンスをもっていることになる。というわけで、もしそこまで厳密に書いている答案があったら、追加点をあげようと思う。)