

解答例
離散構造 期末試験 (2006 年 3 月 3 日 (金) 実施)

問 1 (関係) (合計 32 点)

サッカーの 2006 年ワールドカップ大会のグループ F は、Australia, Brazil, Croatia, Japan の 4 か国からなり、これらの国は 1 回ずつ総当たり形式で対戦する。たとえば、Japan は、Brazil, Croatia, Australia と 1 回ずつ対戦する。この 4 か国の集合を A とする。 A 上の二項関係 R, S, T を次のように定義する。

$xRy \Leftrightarrow (x \text{ と } y \text{ が対戦する})$

$xSy \Leftrightarrow (x \text{ の頭文字が } y \text{ の頭文字よりアルファベット順で前であるか同じである})$

$xTy \Leftrightarrow (x \text{ の頭文字が } y \text{ の頭文字よりアルファベット順で前である})$

- (a) 以下の表を答案用紙に記し、 R と S に関して、表の上段のそれぞれの性質が成立するとき○を、成立しないとき×を付けて表を埋めよ (12 点)。

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的	順序 (半順序)	全順序
R						
S						

(解答)

R について

- 自己のチームと対戦することはできないため、 R は反射的でない。
- x と y の対戦自体が、 y と x の対戦と言い換えることができるため、 R は対称的である。
- (Japan R Brazil) と (Brazil R Japan) は成立するが、(Japan R Japan) は成立しないので、 R は推移的ではない。
- (Japan R Brazil) と (Brazil R Japan) は成立するが、(Japan = Brazil) は成立しないので、 R は反対称的ではない。
- 反射的でもなく、推移的でもなく、反対称的でもないため、半順序ではない。
- 半順序でないため、全順序でもない。

S について

- x の頭文字と x の頭文字は同じであるため、 xSx が成り立ち、 S は反射的である。
- (Australia S Brazil) は成立するが (Brazil S Australia) は成立しないので、 S は対称的ではない。
- x の頭文字が y の頭文字よりもアルファベット順で前か同じとき、 x の頭文字は、 y の頭文字よりもアルファベット順で後ろか同じである z よりも、アルファベット順で前か同じとなるため、推移的である。
- 頭文字がアルファベット順で同じでない限り、 xSy と ySx は同時に成立しない。集合 A に属する異なる国同士で頭文字が同じとなる国はないため、 $xSy \wedge ySx$ ならば $x = y$ となる。よって、 S は反対称的である。
- 反射的であり、推移的であり、かつ、反対称的でもあるため、半順序である。
- アルファベットの順番は、いずれの $x, y \in A$ に対しても、常に $xSy \vee ySx$ が成立している。よって、全順序である。

以上より、表を埋めると、

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的	順序 (半順序)	全順序
R	×	○	×	×	×	×
S	○	×	○	○	○	○

となる。

- (b) 以下の表を答案用紙に記し、表の左側の組が、合成関係 $R \circ T$ および合成関係 $T \circ R$ に属する場合は○を、属さない場合は×を付けて表を埋めよ (4 点)。

$\langle x, y \rangle$	$x(R \circ T)y$ か?	$x(T \circ R)y$ か?
$\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$		
$\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$		

(解答)

$R \circ T$ について

- $\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$ の場合
 $\langle \text{Japan}, z \rangle \in R \wedge \langle z, \text{Australia} \rangle \in T$ を満たす $z \in A$ が存在すればよい。しかし、Australia の頭文字よりもアルファベット順が前である国は存在しないため、 $\langle \text{Japan}, z \rangle \in R \wedge \langle z, \text{Australia} \rangle \in T$ を満たす $z \in A$ は存在せず、 $\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$ は $R \circ T$ に属さない。
- $\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$ の場合
 $\langle \text{Brazil}, z \rangle \in R \wedge \langle z, \text{Croatia} \rangle \in T$ を満たす $z \in A$ が存在すればよい。Croatia の頭文字よりもアルファベット順が前である国は Australia, Brazil であり、Australia は、 $\langle \text{Brazil}, \text{Australia} \rangle \in R \wedge \langle \text{Australia}, \text{Croatia} \rangle \in T$ を満たすため、 $\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$ は $R \circ T$ に属する。

$T \circ R$ について

- $\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$ の場合
 $\langle \text{Japan}, z \rangle \in T \wedge \langle z, \text{Australia} \rangle \in R$ を満たす $z \in A$ が存在すればよい。しかし、Japan の頭文字よりもアルファベット順が後である国は存在せず、 $\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$ は $T \circ R$ に属さない。
- $\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$ の場合
 $\langle \text{Brazil}, z \rangle \in T \wedge \langle z, \text{Croatia} \rangle \in R$ を満たす $z \in A$ が存在すればよい。Brazil の頭文字よりもアルファベット順が後ろである国は Croatia, Japan であり、Japan は、 $\langle \text{Brazil}, \text{Japan} \rangle \in R \wedge \langle \text{Japan}, \text{Croatia} \rangle \in T$ を満たすため、 $\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$ は $T \circ R$ に属する。

以上より、表を埋めると

$\langle x, y \rangle$	$x(R \circ T)y$ か?	$x(T \circ R)y$ か?
$\langle \text{Japan}, \text{Australia} \rangle$	×	×
$\langle \text{Brazil}, \text{Croatia} \rangle$	○	○

となる。

(c) グループ F における総当たりの対戦が終了したとする。 A 上の二項関係 U, V を、それぞれ、

$$xUy \Leftrightarrow (x \text{ が } y \text{ に勝った})$$

$$xVy \Leftrightarrow (x \text{ と } y \text{ が引き分けた})$$

と定義する。 U や V は、実際の試合結果により、異なる二項関係となる。以下の表を答案用紙に記述した上で、 U や V としてあり得る二項関係の中に、表の上段のそれぞれの性質を満たす二項関係が存在するとき $\bigcirc$ を、存在しないとき $\times$ を付けて表を埋めよ (16 点)。

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的
U				
V				

(解答)

U について

- 自己のチームと対戦することはできないため、自己に勝つこともできない。よって、反射的となる U は存在しない。
- 全ての対戦が引き分けになると、 $U \subset A \times A$ は空集合となる。このとき、対称律の条件 xUy が成立する $\langle x, y \rangle \in U$ は存在せず、対称律は常に成立する。つまり、対称的となる U は存在する。

(補足説明) もし、 U を空集合以外の $A \times A$ の部分集合に限定したとすると、対称的となる U は存在しない。何故なら、 x が y に勝った場合に、 y は x に負けたのであり、 y が x に勝ったとは言えないためである。

- 例えば、以下のような結果になった場合、 $xUy \wedge yUz$ が成り立ついずれの x, y, z に対しても、 xUz が成立している。よって、推移的となる U が存在する。但し、以下の表の見方は、例えば、Japan が Croatia にも Brazil にも Australia にも勝ったことを表し、その他の対戦においても、同様の方法により記載している。-は対戦がないことを表す。

	Brazil	Japan	Croatia	Australia
Brazil	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
Japan	$\times$	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$
Croatia	$\times$	$\times$	-	$\bigcirc$
Australia	$\times$	$\times$	$\times$	-

- x が y に勝ったとき、 y は x に負けたのであり、 y が x に勝ったとは言えないため、 xUy と yUx が同時に成立することはない。よって、反対称律の条件 $(xUy \wedge yUx)$ が成立する $\langle x, y \rangle$ は存在せず、反対称律は常に成立する。つまり、どのような U においても、反対称的となる。

V について

- x と x が対戦することはないため、どのように V をとっても、 x と x が引き分けることはない。よって、 V は反射的でない。
- x と y が引き分ければ、常に、 y と x が引き分けたことにもなるため、 V の取り方に依存せず、 V は対称的となる。
- 例えば、以下のような結果になった場合、 $xVy \wedge yVz$ が成り立ついずれの x, y, z に対しても、 xVz が成立している。よって、推移的となる V が存在する。但し、以下の表において、 $\triangle$ は引き分けを表し、-は対戦がないことを表す。

	Brazil	Japan	Croatia	Australia
Brazil	-	$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$
Japan	$\triangle$	-	$\triangle$	$\triangle$
Croatia	$\triangle$	$\triangle$	-	$\triangle$
Australia	$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$	-

- 全ての対戦において引き分けが起こらなかったとき、 $V \subset A \times A$ は空集合となる。このとき、反対称律の条件 $(xVy \wedge yVx)$ が成立する $\langle x, y \rangle$ は存在せず、反対称律は常に成立する。よって、反対称的となる V が存在する。

（補足説明） もし、 V を空集合以外の $A \times A$ の部分集合に限定したとすると、反対称的な V は存在しない。何故なら、空集合以外の如何なる V においても、 x と y が引き分ければ、 y と x が引き分けたことにもなり、 $xVy \wedge yVx$ を満たすが、対戦相手は自分自身であることはないため、 $x \neq y$ となるためである。

以上より、表を埋めると、

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的
U	×	○	○	○
V	×	○	○	○

となる。

問 2 (グラフ) (合計 33 点)

問 1 で考察した 2006 年ワールドカップ大会の決勝トーナメントは、A, B, ..., H の 8 つのグループの上位 2 か国 (合計 16 か国) が出場するトーナメント戦である。16 か国によるトーナメント戦とは、ベスト 16、準々決勝、準決勝、決勝と、勝ち残った国同士が対戦を繰り返して、1 位を決定する方法である。この決勝トーナメントを含む、2006 年ワールドカップ大会の対戦状況 (の一部) を、次の手順によりグラフとして表現する。

まず、グループ A の 1 位から 4 位の国に順番に 1, 2, 3, 4 を割当て、グループ B の 1 位から 4 位の国に 5, 6, 7, 8 を割り当てる。次に、無向グラフ $G = \langle V, E \rangle$ を次のように定義する。

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E = \{\{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V \wedge (\text{グループ内の総当たり戦で国 } x \text{ と国 } y \text{ が対戦したか、あるいは決勝トーナメントの 1 回戦で、国 } x \text{ と国 } y \text{ が対戦した})\}$$

なお、「国 x 」とは、 x という数が割当てられた国を指す。また、決勝トーナメントの 1 回戦 (ベスト 16 での対戦) では、次のように対戦し、これら以外にグループ A, B に所属する国が関係する対戦はない。

グループ A の 1 位とグループ B の 2 位が対戦する
グループ B の 1 位とグループ A の 2 位が対戦する

(a) グラフ G を描け (5 点)。

(解答)

図 1 にグラフ G を示す。

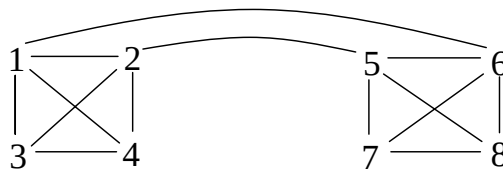


図 1: グラフ G

(b) グラフ G において、頂点 3 と頂点 5 の次数をそれぞれ示せ (6 点)。

(解答)

頂点の次数は、その頂点と他の頂点を結ぶ辺の数であるため、頂点 3 の次数は 3、頂点 5 の次数は 4 である。

(c) グラフ G の位数とサイズをそれぞれ示せ (6 点)。

(解答)

グラフの位数は頂点の数であり、サイズは辺の数であるため、グラフ G の位数は 8、サイズは 14 である。

- (d) グラフ G において、頂点 1 から頂点 8 への単純道の中で、 $\langle 1, 6, \dots \rangle$ と表現される単純道に注目する。このような単純道で頂点 2 を含むものが存在するか否かを理由と共に示せ (5 点)。

(解答)

単純道は、同じ辺を 2 回通ることではない道である。単純道のこの性質のため、頂点 1 から始まる単純道が、頂点 1 より辺 $\{1, 6\}$ を経由して頂点 6 へ移動した後、いずれかの辺を経て頂点 2 に到達するためには、必ず、辺 $\{2, 5\}$ を通らなくてはならない。しかし、その後、頂点 2 より単純道の終点である頂点 8 に到達するためには、辺 $\{1, 6\}$ か辺 $\{2, 5\}$ のいずれかを通過しなければならず、既にこれらの辺を通過しているため、同じ辺を 2 回通らなくてはならないこととなる。よって、 $\langle 1, 6, \dots \rangle$ と表現される単純道に頂点 2 を含むものは存在しない。

- (e) グラフ G の部分グラフ $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ と $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} V_2 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ E_2 &= \{\{x, y\} \in E \mid x \in V_2 \wedge y \in V_2\} \\ V_3 &= \{5, 6, 7, 8\} \\ E_3 &= \{\{x, y\} \in E \mid x \in V_3 \wedge y \in V_3\} \end{aligned}$$

G_2 から辺 $\{1, 2\}$ を取り除いて得られるグラフを G'_2 、 G_3 から辺 $\{5, 7\}$ を取り除いて得られるグラフを G'_3 とおくと、 G'_2 と G'_3 は同型であるか否かを理由と共に示せ (6 点)。

(解答)

グラフ G'_2 とグラフ G'_3 を描くと図 2 となる。また、 $G'_2 = \langle V_2, E'_2 \rangle$, $G'_3 = \langle V_3, E'_3 \rangle$ とおく。関数 $f: V_2 \rightarrow V_3$ を、1 を 7 に、2 を 5 に、3 を 8 に、4 を 6 に写像する関数とすると、 V_3 のそれぞれの要素に写像する V_2 の要素が 1 つ存在し、 V_2 に属する異なる要素が V_3 に属する異なる要素に写像するため、 f は全単射である。加えて、 G'_2 の全ての辺 $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ に対して、

$$\begin{aligned} \{f(1), f(3)\} &= \{7, 8\} \in E'_3, \\ \{f(1), f(4)\} &= \{7, 6\} \in E'_3, \\ \{f(2), f(3)\} &= \{5, 8\} \in E'_3, \\ \{f(2), f(4)\} &= \{5, 6\} \in E'_3, \\ \{f(3), f(4)\} &= \{8, 6\} \in E'_3, \end{aligned}$$

が成り立っている。よって、 G'_2 と G'_3 は同型である。



図 2: グラフ G'_2 とグラフ G'_3

- (f) 問 (e) のグラフ G_2 から k 本の辺を取り除き、木を得た。このとき、 k が取り得る値の最小値を示せ (5 点)。

(解答)

問 (e) の図 2 に示したように、辺を 1 つ取り除いても、3 つの閉路が存在し、木ではない。このことは、取り除いた辺に依存せず成り立つ。図 2 より更に 1 本の辺を取り除くと、取り除く辺に依存せず、1 つの閉路が残る。よって、この 1 つの閉路が存在しなくなるように、もう 1 本の辺を取り除くことにより、木を作成できる。以上より、 $k = 3$ である。