『離散構造』 中間試験 解答例

2006 年 1 月 27 日 (金)

問 1 (論理: 合計 35 点, (a) 5 点*3 問=15 点, (b) 5 点*3 問=15 点, (c) 5 点

(a)

$P : B \vee \neg B.$

$Q : (\neg A) \wedge B.$

$R : (\neg A) \wedge (\neg B).$

(b) 以下の真理値表からわかるとおり、これらの命題はすべて恒真式である。

A	B	$\neg A$	$\neg B$	P	Q	R	$Q \vee R$	$(\neg A) \Rightarrow (Q \vee R)$
T	T	F	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T

A	B	C	Q	R	$Q \Rightarrow C$	$R \Rightarrow C$	$(Q \Rightarrow C) \wedge (R \Rightarrow C)$	$(\neg A) \Rightarrow C$	$((Q \Rightarrow C) \wedge (R \Rightarrow C)) \Rightarrow ((\neg A) \Rightarrow C)$
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F	F	F	T

(c) $Q \Rightarrow C$ は正しい命題である理由を説明する。

Q を仮定する。すると、$\sqrt{2}$ が無理数であり，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数でない。これは命題 C において $x = y = \sqrt{2}$ と置いた場合であり、存在命題 C で具体的な例が見つかったので、C は正しい。Q を仮定して、C が導けたので、$Q \Rightarrow C$ は正しい。

[解説] 上のような説明で十分であるが、記号論理を使うと以下のようになる。

$U(x, y)$ を「x と y が無理数であり，x^y が無理数でない」という命題とする。

C は $\exists x \exists y\, U(x, y)$ であり、Q は $U(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ と同値である。

すなわち、$Q \Rightarrow C$ は

$$U(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow \exists x \exists y\, U(x, y)$$

ということであり、これは、存在記号に関する推論により正しい。

問 2 (集合: 合計 30 点, (a) 5 点*3 問=15 点, (b) 7 点+8 点)

(a)

$S = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ (3 以上 18 未満の偶数は、これら 7 個の数である。)

$T = \{4, 6, 10, 14\}$ ($2, 3, 5, 7$ は素数であり、$4, 6, 8$ は素数でない。したがって、前者のそれぞれの 2 倍である $4, 6, 10, 14$ が集合 T の要素である。)

$S - T = \{8, 12, 16\}$ なので、$U = \{\{\}, \{8\}, \{12\}, \{16\}, \{8, 12\}, \{8, 16\}, \{12, 16\}, \{8, 12, 16\}\}$ である。

(b) 命題 D: $(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (Z \cup X) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z)$ は成立しない。

理由: $X = \{1\}, Y = \{\}, Z = \{1\}$ とすると、$(X \cup Y) \cap (Y \cup Z) \cap (Z \cup X) = \{1\} \cap \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ であるが、$(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) = \{\} \cup \{\} = \{\}$ となり、上記の等式は成立しない。(これ以外の具体例をあげてもよい。)

命題 E: $(X \subset Y) \Rightarrow ((Z-Y) \subset (Z-X))$ は成立する。

証明: $X \subset Y$ と仮定する。

すべての x に対して、 $x \in (Z-Y)$ ならば $x \in (Z-X)$ を導けばよい。

そこで、$x \in (Z-Y)$ と仮定する。$-$ (差集合) の定義により、$x \in Z$ かつ $x \notin Y$ である。ところで、もし $x \in X$ とすると、$X \subset Y$ だから、$x \in Y$ となり、$x \notin Y$ と矛盾してしまう。すなわち、$x \notin X$ である。よって、$x \in Z$ かつ $x \notin X$ がいえたので、$x \in (Z-X)$ である。

以上より、「すべての x に対して、 $x \in (Z-Y)$ ならば $x \in (Z-X)$」が導けたので、$(Z-Y) \subset (Z-X)$ である。

最初に $X \subset Y$ と仮定して、$(Z-Y) \subset (Z-X)$ が導けたので、$(X \subset Y) \Rightarrow ((Z-Y) \subset (Z-X))$ である。(証明おわり)

[解説] この証明は、かなり丁寧に書いたが、ある程度、短縮して書いてもよい。