

解答

- (a) B_1 の全ての要素に対して、 A_1 の要素が 1 つ以上対応付けられているため、全射である。
- (b) A_2 の異なる要素は、 B_1 の異なる要素に対応付けられているため、単射である。
- (c) f は全射であるが、単射でない。よって、全単射でない。 g は単射であり、かつ、全射である。よって、全単射である。以上より、全単射となるのは、 g のみである。
- (d) A_1 の要素数と B_2 の要素数が同一であるため、 A_1 の異なる要素が B_2 の同一の要素に対応付けないようにすることが可能である。例えば、「りんご」に「好き」を、「ばなな」に「嫌い」を、「かき」に「どちらでもない」を対応付ける関数は単射となる。よって、単射となる関数が存在する。
- (e) 全単射となる関数が存在するのは、 A_i と B_j の要素数が同一の場合である。よって、 $\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle$ が解となる。
- (f) 定義域の要素数と値域の要素数が同一である場合にのみ、全単射となりえる。よって、定義域の要素数と値域の要素数を比べ、同一でない組み合わせ、つまり、全単射とならない組み合わせが何個発生するかを比べればよい。 $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}$ に対して、集合 A_i から集合 B_j への、ある関数を h_{ij} と表すとき (つまり、 h_{ij} は、 $h_{ij} : A_i \rightarrow B_j$ を満たす)、全単射とならない場合を列挙すると、以下のようになる。
- i) いちごが A_1, A_2, A_3 のいずれの集合にも属さないとき、いずれの h_{11}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{22} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{31} と S_2 の H_{22} が非全単射関数族である。
 - ii) いちごが A_1 に属し、 A_2, A_3 に属さないとき、いずれの h_{11}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{12}, h_{22} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{31} と S_2 の H_{12}, H_{22} が非全単射関数族である。
 - iii) いちごが A_2 に属し、 A_1, A_3 に属さないとき、いずれの h_{11}, h_{21}, h_{31} も全単射でなく、どの i に対しても、全単射となる h_{i2} が存在する。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{21}, H_{31} が非全単射関数族である。
 - iv) いちごが A_3 に属し、 A_1, A_2 に属さないとき、いずれの h_{11}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{22}, h_{32} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{31} と S_2 の H_{22}, H_{32} が非全単射関数族である。
 - v) いちごが A_1, A_2 に属し、 A_3 に属さないとき、いずれの h_{11}, h_{21}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{12} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{21}, H_{31} と S_2 の H_{12} が非全単射関数族である。
 - vi) いちごが A_1, A_3 に属し、 A_2 に属さないとき、いずれの h_{11}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{12}, h_{22}, h_{32} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{31} と S_2 の H_{12}, H_{22}, H_{32} が非全単射関数族である。
 - vii) いちごが A_2, A_3 に属し、 A_1 に属さないとき、いずれの h_{11}, h_{21}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{32} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{21}, H_{31} と S_2 の H_{32} が非全単射関数族である。
 - viii) いちごが A_1, A_2, A_3 に属するとき、いずれの h_{11}, h_{21}, h_{31} も全単射でなく、いずれの h_{12}, h_{32} も全単射でない。つまり、 S_1 の H_{11}, H_{21}, H_{31} と S_2 の H_{12}, H_{32} が非全単射関数族である。
- 以上より、vi) の「いちごを A_1, A_3 に所属させ、 A_2 に所属させない」ときが、 S_2 の方が S_1 よりも要素とする非全単射関数族の数が多くなる。