離散構造 期末試験, 2017 年 12 月 22 日 (金)

解答用紙は 2 枚である。**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること。裏を使用してもよい。問 1 と問 2 の解答を 1 枚の解答用紙に，問 3 と問 4 の解答を別の 1 枚の解答用紙に記入しなさい。(それぞれの解答用紙の中では，問題の順番通りに解答を記述する必要はない。) それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ。

問 1. (配点 25 点) あるコンビニエンスストアでは，アルバイトの学生 4 人が，リーダー，サブリーダー A，サブリーダー B，見習いとして働いている。店長は，ある日の 4 人の勤務体制を決める際に，以下のような 5 つの条件が満たされるようにしたいと考えている。（なおここでは，4 人がそれぞれ出勤するか否かで，全部で 16 通りの勤務体制が考えられるものとする。）

条件 1： リーダーかサブリーダー A の少なくともどちらか一方は出勤する。

条件 2： リーダー，サブリーダー A，およびサブリーダー B の 3 人が同時に出勤することはない。

条件 3： リーダーが出勤するならば，2 人のサブリーダーのうちの少なくともいずれか一方は出勤する。

条件 4： 見習いが出勤するならばリーダーも出勤する。

条件 5： サブリーダー A が 1 人だけ出勤する，ということはない。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1-a) 次の原子文 P，Q，R，S を使って，上記の 5 つの条件をそれぞれ命題論理の論理式によって表現せよ。

P	リーダーが出勤する。
Q	サブリーダー A が出勤する。
R	サブリーダー B が出勤する。
S	見習いが出勤する。

(1-b) リーダーは,「店長よりも長い時間働いているアルバイト店員は，皆給料をたくさんもらっていて不満を持っていない」と思っている。この文を，以下の個体定項と述語記号を使って，述語論理の論理式によって表現せよ。

m	店長
$W(x,y)$	x は y よりも長い時間働く。
$A(x)$	x はアルバイトの店員である。
$S(x)$	x は給料をたくさんもらっている。
$C(x)$	x は不満を持っている。

(1-c) 上記の条件 1，2，3 を全て満たす（条件 4 と 5 を満たすかどうかは分からない）どのような勤務体制についても,「リーダーが出勤するとき，かつそのときに限り，2 人のサブリーダーのうちのいずれか一方だけが出勤する」という性質が成り立つと言えるか。理由とともに答えよ。

(1-d) サブリーダー A と見習いの 2 人が同時に風邪をひいて出勤できなくなってしまった。このとき条件 1，2，3，4 を全て満たすような（条件 5 を満たすかどうかは分からない）勤務体制は存在するか。理由とともに答えよ。

(1-e) 店長は，サブリーダー A と見習いの 2 人を出勤させ，リーダーとサブリーダー B の 2 人を出勤させないことにした。この勤務体制は上記の 5 つの条件を全て満たしていると言えるか。満たしている場合はその理由を，そうでない場合は満たされない条件を全て列挙せよ。

問 2. (配点 25 点)

0 以上 13 未満の整数の集合を $\mathcal{N}_{13}$ とする。ここで $0 \in \mathcal{N}_{13}$ かつ $13 \notin \mathcal{N}_{13}$ である。また，自然数 x に対して，$x \mod 13$ は x を 13 で割った余りを表す。

関数 $f : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ と関数 $g : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ を次のように定義する。

$$f(x) = 3x \mod 13$$
$$g(x) = x^2 \mod 13$$

たとえば，$f(10) = 30 \mod 13 = 4$, $g(4) = 16 \mod 13 = 3$ である。このとき，以下の問に答えなさい。

(2-a) 集合 $S = \{5, 6, 7\}$ に対して，g による S の像 $g(S)$ を計算しなさい。

(2-b) f と g はそれぞれ全単射か，理由とともに答えなさい。

(2-c) $h : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ となる関数 h で，$f \circ g = h \circ f$ が成立するものがあるかどうか調べ，あるなら，そういう関数 h を書きなさい。(該当する h が複数あるならそのうちの 1 つを書けばよい)。なければ，簡潔にその理由を答えなさい。

(2-d) T_1, T_2 を $\mathcal{N}_{13}$ の任意の部分集合とする。$f(T_1 \cup T_2) = f(T_1) \cup f(T_2)$ が常に (どんな T_1, T_2 に対しても) 成立するか理由をつけて答えなさい。(成立するなら理由を簡潔に述べ，成立しないなら反例となる T_1, T_2 を 1 組，書きなさい。)

(2-e) T_1, T_2 を前問と同様とするとき，$(g(T_1) \subset g(T_2)) \Longrightarrow (T_1 \subset T_2)$ が常に成立するか理由をつけて答えなさい。(成立するなら理由を簡潔に述べ，成立しないなら反例となる T_1, T_2 を 1 組，書きなさい。)

問 3. (配点 25 点)

集合 $V = \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$ とし，V 上の 2 項関係 R,S をそれぞれ以下のように定める。

$$\langle x_1, y_1 \rangle \ R \ \langle x_2, y_2 \rangle \Longleftrightarrow x_2 = x_1 + 1 \bmod 2 \land y_1 = y_2$$
$$\langle x_1, y_1 \rangle \ S \ \langle x_2, y_2 \rangle \Longleftrightarrow y_2 = y_1 + 1 \bmod 3 \land x_1 = x_2$$

(3-a) 頂点集合を V，辺集合を $R \cup S$ とする有向グラフ G を図示しなさい。辺の向きと各頂点に対応する V の要素が，図からはっきり読み取れるようにすること。

(3-b) 有向グラフ G の頂点と辺の数をそれぞれ答えよ。また，頂点 $\langle 0, 0 \rangle$ の入次数と出次数を答えよ。

(3-c) 有向グラフ G において，最長の単純道（同じ辺を 2 回以上通らない道）を一つ挙げ，その長さを答えよ。

(3-d) 合成関係 $R \circ R$ が同値関係であるか否か理由をつけて答えよ。

(3-e) 2 項関係 T を以下のように定める。

$$x \ T \ y \Longleftrightarrow \text{「有向グラフ } G \text{ において，} x \text{ から } y \text{ への道が存在する」}$$

このとき関係 T が半順序であるか否か理由をつけて答えよ。

問 4. (配点 25 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする。また，文字の集合 A と Σ を，それぞれ $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$，$\Sigma = A \cup \{\mathtt{\#}, \mathtt{*}\}$ とする。さらに，Σ 上の文字列の集合 S を以下のように帰納的に定義する。

- Base Case : $\Lambda \in S$。
- Induction Step (1) : $s \in S$ かつ $x \in A$ ならば $x \cdot s \in S$。
- Induction Step (2) : $s \in S$ かつ $x = \mathtt{\#}$ かつ $y \in A$ ならば $x \cdot y \cdot s \in S$。
- Induction Step (3) : $s \in S$ かつ $x = \mathtt{*}$ ならば $x \cdot s \in S$。

ただしここで,「Λ」は空文字列を表す。このとき，以下の問に答えよ。

(4-a) 文字列「`*a#*bc`」は S の要素であるか。理由をつけて答えよ。

(4-b) ここで，A 上のリストを全て集めてできる集合を $List_A$ とする。また，関数 $f : S \to List_A$ を以下のように定める。

$$f(s) = \begin{cases} \langle\, \rangle & (s = \Lambda \text{のとき}) \\ cons(x, f(s')) & (s = x \cdot s' \text{かつ}\ x \in A\ \text{のとき}) \\ f(s') & (s = x \cdot y \cdot s' \text{かつ}\ x = \texttt{\#} \text{かつ}\ y \in A\ \text{のとき}) \\ f(s') \oplus f(s') & (s = x \cdot s' \text{かつ}\ x = * \text{のとき}) \end{cases}$$

ただし,「$\oplus$」はリストの連結を表すものとする。このとき，$f(\texttt{\#ab*c})$ を，f の定義に従って計算せよ。ただし，計算の過程も明記すること。

(4-c) 与えられた文字列 $s \in S$ において，少なくとも 1 つ「`#`」か「`*`」が出現するときには 1 を，そうでないときには 0 を返す関数 $h : S \to \{0, 1\}$ を帰納的に定義せよ。（例えば，$h(\texttt{a\#b}) = h(\texttt{*b*c\#a}) = 1$ であるが，$h(\texttt{a}) = h(\texttt{bcc}) = 0$ であるとする。）

(4-d) ここで，関数 $g : S \to \mathcal{N}$ を以下のように定める。

$$g(s) = \begin{cases} 0 & (s = \Lambda \text{のとき}) \\ g(s') + 1 & (s = x \cdot s' \text{かつ}\ x \in A\ \text{のとき}) \\ g(s') & (s = x \cdot y \cdot s' \text{かつ}\ x = \texttt{\#} \text{かつ}\ y \in A\ \text{のとき}) \\ g(s') \times 2 & (s = x \cdot s' \text{かつ}\ x = * \text{のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の $s \in S$ について，等式 $length(f(s)) = g(s)$ が成り立つことを証明せよ。ただしここで，$length : List_A \to \mathcal{N}$ は与えられたリストの長さを返す関数であるとする。ただし，証明の中で「任意の $L, L' \in List_A$ について，$length(L \oplus L') = length(L) + length(L')$」が成り立つことを，証明なしに用いてよいとする。