離散構造 期末試験 解答

問 1. (配点 25 点)

(1-a) 次の原子文 P，Q，R，S を使って，上記の 5 つの条件をそれぞれ命題論理の論理式によって表現せよ。

答え．

- 条件 1：$P \lor Q$
- 条件 2：$\neg(P \land Q \land R)$
- 条件 3：$P \Rightarrow Q \lor R$
- 条件 4：$S \Rightarrow P$
- 条件 5：$\neg(Q \land \neg P \land \neg R \land \neg S)$

(1-b) リーダーは,「店長よりも長い時間働いているアルバイト店員は，皆給料をたくさんもらっていて不満を持っていない」と思っている。この文を，以下の個体定項と述語記号を使って，述語論理の論理式によって表現せよ。

答え．$\forall x(W(x,m) \land A(x) \Rightarrow S(x) \land \neg C(x))$ となる。

(1-c) 上記の条件 1，2，3 を全て満たす（条件 4 と 5 を満たすかどうかは分からない）どのような勤務体制についても,「リーダーが出勤するとき，かつそのときに限り，2 人のサブリーダーのうちのいずれか一方だけが出勤する」という性質が成り立つと言えるか。

答え．成り立たない。理由を以下で説明する。まず，以降の問題を解くために必要となる真理値表を示す。

P	Q	R	S	条件 1	条件 2	条件 3	条件 4	条件 5	(1-c) の性質
T	T	T	T	T	F	T	T	T	F
T	T	T	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	T

条件 1，2，3 の論理式が全て真となる行は 3，4，5，6，9，10，11，12 行目である。一方，問題の性質は論理式 $P \Leftrightarrow (Q \land \neg R) \lor (\neg Q \land R)$ で表すことができ，これが真となる行は 3，4，5，6，9，10，15，16 行目である。この結果から明らかなように，11，12 行目の場合に対応する「リーダーが出勤してサブリーダ 2 人が出勤しない」勤務体制では，条件 1，2，3 を全て満たすものの，問題の性質は偽となるためである。

(1-d) サブリーダー A と見習いの 2 人が同時に風邪をひいて出勤できなくなってしまった。このとき条件 1，2，3，4 を全て満たすような（条件 5 を満たすかどうかは分からない）勤務体制は存在するか。

答え．存在する。なぜなら，真理値表から明らかなように，サブリーダー A と見習いが共に出勤せずリーダーとサブリーダー B が出勤する体制（6 行目に対応）は，風邪をひいた 2 人が出勤しなくても条件 1〜4 を全て満たしているためである。

(1-e) 店長は，サブリーダー A と見習いの 2 人を出勤させ，リーダーとサブリーダー B の 2 人を出勤させないことにした。この勤務体制は上記の 5 つの条件を全て満たしていると言えるか。満たしている場合はその理由を，そうでない場合は満たされない条件を全て列挙せよ。

答え．この勤務体制は真理値表の 11 行目に対応している。この行は，条件 1〜5 が全て真とならない。よって，5 つの条件を全て満たしているとは言えない。この表から明らかなように，満たすことができない条件は 4 である。

問 2．(配点 25 点)

0 以上 13 未満の整数の集合を $\mathcal{N}_{13}$ とする。ここで $0 \in \mathcal{N}_{13}$ かつ $13 \notin \mathcal{N}_{13}$ である。また，自然数 x に対して，$x \mod 13$ は x を 13 で割った余りを表す。

関数 $f : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ と関数 $g : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ を次のように定義する。

$$f(x) = 3x \mod 13$$
$$g(x) = x^2 \mod 13$$

たとえば，$f(10) = 30 \mod 13 = 4$, $g(4) = 16 \mod 13 = 3$ である。このとき，以下の問に答えなさい。

(2-a) 集合 $S = \{5, 6, 7\}$ に対して，g による S の像 $g(S)$ を計算しなさい。

答え．$g(S) = \{g(5), g(6), g(7)\}$ であるが、$g(5) = 12$, $g(6) = g(7) = 10$ であるので、$g(S) = \{10, 12\}$ である。

(2-b) f と g はそれぞれ全単射か，理由とともに答えなさい。

答え．f は全単射である。その理由: 定義域の値 $0, 1, 2, \cdots, 12$ に対する f の値を列挙すると、$0, 3, 6, 9, 12, 2, 5, 8, 11, 1, 4, 7, 10$ となり、全ての値が相異なり、かつコドメインの全ての値をカバーするので全単射である。

g は全単射でない。その理由: 2-a で計算したように $g(5) = g(6)$ であるので単射でない。

(2-c) $h : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ となる関数 h で，$f \circ g = h \circ f$ が成立するものがあるかどうか調べ，あるなら，そういう関数 h を書きなさい。(該当する h が複数あるならそのうちの 1 つを書けばよい)。なければ，簡潔にその理由を答えなさい。

答え．存在する。$x = 0, 1, 2, \cdots, 12$ に対する h の値は、$0, 9, 10, 3, 1, 4, 12, 12, 4, 1, 3, 10, 9$ である。(そのような h はただ 1 つである。)

解説: この問題は特別なテクニックを使わなくても、$x = 0, 1, 2, \cdots, 12$ のすべての値に対して $(f \circ g)(x)$ の値を計算し、$h(f(x))$ がその値になるよう h の値を決めればよい。

数学的センスのある人の解答: f は全単射であるので逆関数 f^{-1} が存在する。$f \circ g = h \circ f$ の両辺に右から f^{-1} を合成することにより、$(f \circ g) \circ f^{-1} = (h \circ f) \circ f^{-1} = h \circ (f \circ f^{-1}) = h$ となる。ところで、$f^{-1}(x) = 9x \mod 13$ となるので、結局 $h(x) = f(g(f^{-1}(x))) = 3(9x)^2 \mod 13 = 243x^2 \mod 13 = 9x^2 \mod 13$ となる。

(2-d) T_1, T_2 を $\mathcal{N}_{13}$ の任意の部分集合とする。$f(T_1 \cup T_2) = f(T_1) \cup f(T_2)$ が常に (どんな T_1, T_2 に対しても) 成立するか理由をつけて答えなさい。(成立するなら理由を簡潔に述べ，成立しないなら反例となる T_1, T_2 を 1 組，書きなさい。)

答え．常に成立する。

左辺が右辺の部分集合である理由: 左辺の任意の要素を y とすると、ある $x \in T_1 \cup T_2$ に対して、$f(x) = y$ である。この x に対して、$x \in T_1$ または $x \in T_2$ が成立するので $y \in f(T_1)$ または $y \in f(T_2)$ であり、いずれにせよ、$y \in f(T_1) \cup f(T_2)$ である。

右辺が左辺の部分集合である理由: $y \in f(T_1)$ と仮定すると、ある $x \in T_1$ に対して $y = f(x)$ である。$x \in T_1 \cup T_2$ なので、$y \in f(T_1 \cup T_2)$ である。同様に $y \in f(T_2)$ と仮定しても $y \in f(T_1 \cup T_2)$ がいえるので、結局 $y \in f(T_1) \cup f(T_2)$ ならば $y \in f(T_1 \cup T_2)$ である。

(2-e) T_1, T_2 を前問と同様とするとき，$(g(T_1) \subset g(T_2)) \Longrightarrow (T_1 \subset T_2)$ が常に成立するか理由をつけて答えなさい。

答え. 常には成立しない。反例としては $T_1 = \{5\}, T_2 = \{6\}$ を取れば、「ならば」の前提 (左) は成立し、「ならば」の結論 (右) は成立しない。

解説: 一般に g が単射でないとき、問題文の論理式は成立しない。この問題の g は 2-a で計算した通り単射でない。

問 3. (配点 25 点)

集合 $V = \{0,1\} \times \{0,1,2\}$ とし，V 上の 2 項関係 R,S をそれぞれ以下のように定める。

$$\langle x_1, y_1 \rangle \ R \ \langle x_2, y_2 \rangle \Longleftrightarrow x_2 = x_1 + 1 \bmod 2 \wedge y_1 = y_2$$
$$\langle x_1, y_1 \rangle \ S \ \langle x_2, y_2 \rangle \Longleftrightarrow y_2 = y_1 + 1 \bmod 3 \wedge x_1 = x_2$$

(3-a) 頂点集合を V，辺集合を $R \cup S$ とする有向グラフ G を図示しなさい。辺の向きと各頂点に対応する V の要素が，図からはっきり読み取れるようにすること。

答え. グラフ G を図示すると図 1 のようになる.

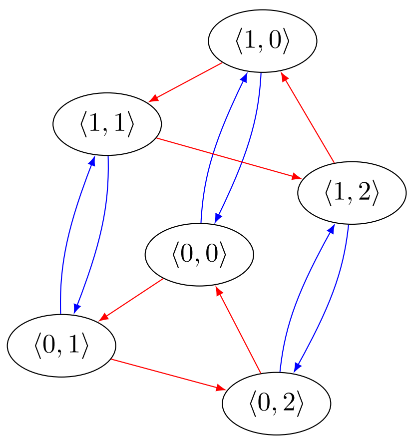

図 1: グラフ G. $\rightarrow$ は R 由来の辺を，$\rightarrow$ は S 由来の辺を表す.

(3-b) 有向グラフ G の頂点と辺の数をそれぞれ答えよ。また，頂点 $\langle 0,0 \rangle$ の入次数と出次数を答えよ。

答え. 頂点の数は 6，辺の数は 12 である．また，頂点 $\langle 0,0 \rangle$ の入次数は 2，出次数は 2 である.

(3-c) 有向グラフ G において，最長の単純道（同じ辺を 2 回以上通らない道）を一つ挙げ，その長さを答えよ。

答え. G は一筆書き可能であるため，例えば

$$\langle \langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,0 \rangle \rangle$$

が最長の単純道であり，その長さは 12 である.

(3-d) 合成関係 $R \circ R$ が同値関係であるか否か理由をつけて答えよ。

答え. $R \circ R = \{\langle x, y \rangle \in V \times V \mid x = y\}$ である．したがって，R は反射的，対称的，推移的であり，同値関係である.

(3-e) 2 項関係 T を以下のように定める。

$$x\ T\ y \Longleftrightarrow \text{「有向グラフ } G \text{ において，} x \text{ から } y \text{ への道が存在する」}$$

このとき関係 T が半順序であるか否か理由をつけて答えよ。

答え．G において $\langle 0,0\rangle$ から $\langle 1,0\rangle$ への道が存在する．また，$\langle 1,0\rangle$ から $\langle 0,0\rangle$ への道も存在する．したがって，$\langle 0,0\rangle\ T\ \langle 1,0\rangle$ かつ $\langle 1,0\rangle\ T\ \langle 0,0\rangle$ である．ところが $\langle 0,0\rangle \neq \langle 1,0\rangle$ であるため T は反対称的でなく，半順序ではない．

問 4. (配点 25 点)

(4-a) 文字列「`*a#*bc`」は S の要素であるか。理由をつけて答えよ。

答え．S の要素ではない。この定義は，S の要素を新たに得る際に，既に S の要素であることが分かっている文字列の左端に新たに文字を付加するものとなっている。よって，`*a#*bc` を得る過程で，必ず `*bc` から `#*bc` を得る操作が現れるはずである。しかし，実際にはそのような操作は存在しない。よって `*a#*bc` を得ることはできない。

(4-b) $f(\texttt{\#ab*c})$ を，f の定義に従って計算せよ。ただし，計算の過程も明記すること。

答え．

$$\begin{array}{rcl}
f(\texttt{\#ab*c}) & = & f(\texttt{b*c}) \\
& = & cons(\texttt{b}, f(\texttt{*c})) \\
& = & cons(\texttt{b}, f(\texttt{c}) \oplus f(\texttt{c})) \\
& = & cons(\texttt{b}, cons(\texttt{c}, f(\Lambda)) \oplus cons(\texttt{c}, f(\Lambda))) \\
& = & cons(\texttt{b}, cons(\texttt{c}, \langle\ \rangle) \oplus cons(\texttt{c}, \langle\ \rangle)) \\
& = & cons(\texttt{b}, \langle \texttt{c}\rangle \oplus \langle \texttt{c}\rangle) \\
& = & cons(\texttt{b}, \langle \texttt{c}, \texttt{c}\rangle) \\
& = & \langle \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{c}\rangle
\end{array}$$

(4-c) 与えられた文字列 $s \in S$ において，少なくとも 1 つ「`#`」か「`*`」が出現するときには 1 を，そうでないときには 0 を返す関数 $h : S \to \{0,1\}$ を帰納的に定義せよ。

答え．

$$h(s) = \begin{cases} 0 & (s = \Lambda \text{のとき}) \\ h(s') & (s = xs' \text{かつ } x \in A \text{ のとき}) \\ 1 & (s = xs' \text{かつ } x = \texttt{\#} \text{または } x = \texttt{*} \text{のとき}) \end{cases}$$

(4-d) 任意の $s \in S$ について，等式 $length(f(s)) = g(s)$ が成り立つことを証明せよ。ただしここで，$length : List_A \to \mathcal{N}$ は与えられたリストの長さを返す関数であるとする。

答え．s に関する帰納法により証明する。

- Base Case：$s = \Lambda$ のとき。
  （左辺）$= length(f(\Lambda)) = length(\langle\ \rangle) = 0$。
  一方，（右辺）$= g(\Lambda) = 0$。
  よって証明すべき等式が成り立つ。
- Induction Step (1)：$s = xs'$ かつ $x \in A$ のとき。
  （左辺）$= length(cons(x, f(s'))) = length(f(s')) + 1$。
  一方，（右辺）$= g(s) = g(s') + 1$。
  帰納法の仮定より，$length(f(s')) = g(s')$ が成り立つため,（左辺）$=$（右辺）が成り立つ。

- Induction Step (2)：$s = xys'$ かつ $x = \texttt{\#}$ かつ $y \in A$ のとき。
  （左辺）$= length(f(s'))$。
  一方，（右辺）$= g(s')$。
  帰納法の仮定より，$length(f(s')) = g(s')$ が成り立つため,（左辺）＝（右辺）も成り立つ。

- Induction Step (3)：$s = xs'$ かつ $x = *$ のとき。
  （左辺）$= length(f(s') \oplus f(s')) = length(f(s')) + length(f(s'))$。
  一方，（右辺）$= g(s') \times 2$。
  帰納法の仮定より，$length(f(s')) = g(s')$ が成り立つため,（左辺）＝（右辺）も成り立つ。

（証明終）