# 『離散構造』演習問題 No.6 解答例（海野）

**問題 1** (集合の帰納的定義)

(a) （0 を含む）自然数上のリストのうち、降順（大きい順）にならんでいるものからなる集合 $L$ を帰納的に定義しなさい。例えば $\langle\rangle, \langle 1\rangle, \langle 5,3,2,0\rangle, \langle 3,2,2,1\rangle \in L$ だが $\langle 2,3\rangle \notin L$ である。

答. そのような集合 $L$ は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\langle\rangle \in L$
- $\forall n \in \mathcal{N}(\langle n\rangle \in L)$
- $\forall n \in \mathcal{N}, \ell \in L(\ell \neq \langle\rangle \wedge n \geq \mathrm{head}(\ell) \Rightarrow \mathrm{cons}(n, \ell) \in L)$

(b) 文字集合（アルファベット）$\{a, b\}$ 上の文字列のうち、$n \geq m \geq 0$ をみたすある $n, m$ について $a$ が $n$ 個並んだ後に $b$ が $m$ 個並んだものからなる集合 $S$ を帰納的に定義せよ。例えば $\Lambda, aabb, aaab, a \in S$ だが $ba, abb \notin S$ である。

答. $S$ は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\Lambda \in S$
- $\forall s \in S(a \cdot s \cdot b \in S)$
- $\forall s \in S(a \cdot s \in S)$

**問題 2** (関数の帰納的定義)

$S$ を文字集合（アルファベット）$\{a, b\}$ 上の文字列全体からなる集合とする。

- $\Lambda \in S$（ここで $\Lambda$ は 0 文字の文字列を表す。）
- $s \in S$ ならば $a \cdot s \in S$
- $s \in S$ ならば $b \cdot s \in S$

また、文字集合 $\{a, b, [, ]\}$ 上の文字列集合 $R$ を以下のように帰納的に定める。

- $\Lambda \in R$
- $r \in R$ ならば $a \cdot r \in R$
- $r \in R$ ならば $b \cdot r \in R$
- $r \in R$ ならば $[r] \in R$（ここで $[r]$ は文字 [ と文字 ] の間に文字列 $r$ を入れたものを表す。）

集合 $S, R$ に対して関数 $f : S \to R$ と $g : R \times \{0, 1\} \to S$ を次のように帰納的に定める。

$$f(s) = \begin{cases} \Lambda & (\text{if } s = \Lambda) \\ a \cdot f(s') & (\text{if } s = a \cdot s') \\ b \cdot f(s') & (\text{if } s = b \cdot s') \end{cases} \qquad g(r, n) = \begin{cases} \Lambda & (\text{if } r = \Lambda) \\ a \cdot g(r', n) & (\text{if } r = a \cdot r' \text{ and } n = 0) \\ b \cdot g(r', n) & (\text{if } r = a \cdot r' \text{ and } n = 1) \\ b \cdot g(r', n) & (\text{if } r = b \cdot r' \text{ and } n = 0) \\ a \cdot g(r', n) & (\text{if } r = b \cdot r' \text{ and } n = 1) \\ g(r', 1 - n) & (\text{if } r = [r']) \end{cases}$$

関数 $f, g$ に関して、以下の問に答えよ。

(a) $f(abab)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} f(abab) & = & a \cdot f(bab) & (\text{fの定義による}) \\ & = & ab \cdot f(ab) & (\text{fの定義による}) \\ & = & aba \cdot f(b) & (\text{fの定義による}) \\ & = & abab \cdot f(\Lambda) & (\text{fの定義による}) \\ & = & abab \cdot \Lambda & (\text{fの定義による}) \\ & = & abab & \end{array}$$

(b) $g(abab, 1)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} g(abab,1) & = & b \cdot g(bab,1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & ba \cdot g(ab,1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & bab \cdot g(b,1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & baba \cdot g(\Lambda,1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & baba \cdot \Lambda & (\text{gの定義による}) \\ & = & baba & \end{array}$$

(c) $g([ab[ba]], 0)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} g([ab[ba]],0) & = & g(ab[ba],1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & ba \cdot g([ba],1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & ba \cdot g(ba,0) & (\text{gの定義による}) \\ & = & baba & (\text{gの定義による}) \end{array}$$

(d) $g(g(abab, 1), 1)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} g(g(abab,1),1) & = & g(baba,1) & (\text{gの定義による}) \\ & = & abab & (\text{gの定義による}) \end{array}$$

(e) 任意の $s \in S$ について $g(f(s), 0) = s$ であることを証明しなさい。

答. $s$ に関する帰納法で証明する。

- case $s = \Lambda$:

$$\begin{array}{rcll} g(f(\Lambda),0) & = & g(\Lambda,0) & (\text{fの定義による}) \\ & = & \Lambda & (\text{gの定義による}) \end{array}$$

- case $s = a \cdot s'$: 帰納法の仮定より、$g(f(s'), 0) = s'$ である。

$$\begin{array}{rcll} g(f(a \cdot s'),0) & = & g(a \cdot f(s'),0) & (\text{fの定義による}) \\ & = & a \cdot g(f(s'),0) & (\text{gの定義による}) \\ & = & a \cdot s' & (\text{帰納法の仮定による}) \end{array}$$

- case $s = b \cdot s'$: 帰納法の仮定より、$g(f(s'), 0) = s'$ である。

$$\begin{array}{rcll} g(f(b \cdot s'),0) & = & g(b \cdot f(s'),0) & (\text{fの定義による}) \\ & = & b \cdot g(f(s'),0) & (\text{gの定義による}) \\ & = & b \cdot s' & (\text{帰納法の仮定による}) \end{array}$$

(f) 任意の $n \in \{0, 1\}$, $r \in R$ について $g(g(r, n), 1) = g(r, 1 - n)$ であることを証明しなさい。

答. $r$ に関する帰納法で証明する。

- case $r = \Lambda$:

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = g(g(\Lambda, n), 1) &= \Lambda && (\text{gの定義による})\\ &= g(\Lambda, 1-n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

- case $r = a \cdot r'$: 帰納法の仮定より、$\forall n \in \{0,1\}(g(g(r', n), 1) = g(r', 1-n))$ である。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = g(g(a \cdot r', n), 1) &= \begin{cases} g(a \cdot g(r', n), 1) & (n=0)\\ g(b \cdot g(r', n), 1) & (n=1)\end{cases} && (\text{gの定義による})\\ &= \begin{cases} b \cdot g(g(r', n), 1) & (n=0)\\ a \cdot g(g(r', n), 1) & (n=1)\end{cases} && (\text{gの定義による})\\ &= \begin{cases} b \cdot g(r', 1-n) & (n=0)\\ a \cdot g(r', 1-n) & (n=1)\end{cases} && (\text{帰納法の仮定による})\\ &= g(a \cdot r', 1-n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

- case $r = b \cdot r'$: 帰納法の仮定より、$\forall n \in \{0,1\}(g(g(r', n), 1) = g(r', 1-n))$ である。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = g(g(b \cdot r', n), 1) &= \begin{cases} g(b \cdot g(r', n), 1) & (n=0)\\ g(a \cdot g(r', n), 1) & (n=1)\end{cases} && (\text{gの定義による})\\ &= \begin{cases} a \cdot g(g(r', n), 1) & (n=0)\\ b \cdot g(g(r', n), 1) & (n=1)\end{cases} && (\text{gの定義による})\\ &= \begin{cases} a \cdot g(r', 1-n) & (n=0)\\ b \cdot g(r', 1-n) & (n=1)\end{cases} && (\text{帰納法の仮定による})\\ &= g(b \cdot r', 1-n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

- case $r = [r']$: 帰納法の仮定より、$\forall n \in \{0,1\}(g(g(r', n), 1) = g(r', 1-n))$ である。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = g(g([r'], n), 1) &= g(g(r', 1-n), 1) && (\text{gの定義による})\\ &= g(r', n) && (\text{帰納法の仮定による})\\ &= g([r'], 1-n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$