『離散構造』演習問題 No.5 解答例 (海野)

問題 1 (無向グラフ)
無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{0, 1, \ldots, 14\}$,
- 頂点 $x \in V$ と $y \in V$ の間に辺があることの必要十分条件は

$$(x \bmod 5 = y \bmod 5 \lor x \bmod 4 = y \bmod 4 = 0) \land x \neq y$$

(a) グラフ G_1 を図示せよ。

答. 図 1 のようになる。

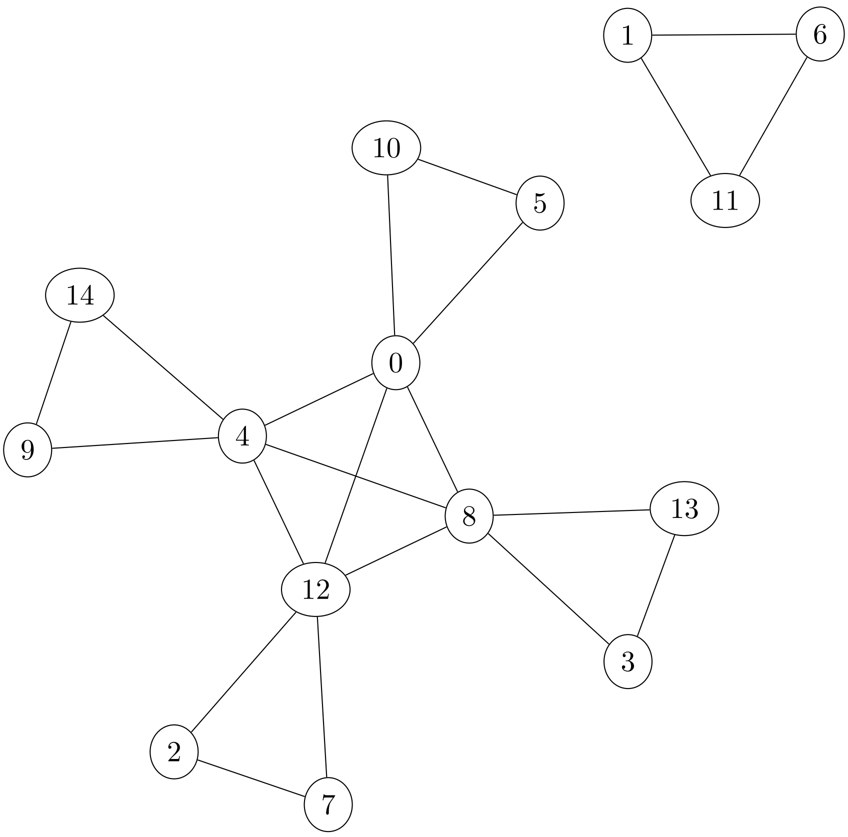

図 1: グラフ G_1

(b) 頂点 8 と 7 の次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 8 の次数は 5、頂点 7 の次数は 2 である。

(c) 頂点 8 から 7 への道の中で最短のものを一つ求め、その長さを答えよ。

答. $\langle 8, 12, 7 \rangle$ が最短の道であり、その長さは 2 である。

(d) 頂点 8 から 4 への単純道（同じ辺を 2 回以上通らない道）の中で最長のものを一つ求め、その長さを答えよ。

答. $\langle 8, 3, 13, 8, 12, 2, 7, 12, 4, 9, 14, 4, 0, 5, 10, 0, 8, 4 \rangle$ が最短の道であり、その長さは 17 である。

(e) グラフ G_1 のサイズ（辺の本数）と位数（頂点の数）を求めよ。

答. サイズは $3 \cdot 5 + 6 = 21$、位数は 15 である。

(f) グラフ G_1 の連結成分の個数を求めよ。

答. 2 個。

(g) グラフ G_1 のすべての辺を通る単純道を一つ求めよ。存在しないならばそう答えよ。

答. G_1 は連結でないためそのような単純道は存在しない。

問題 2 (有向グラフ)

有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{1, 2, \cdots, 12\}$,
- 辺の集合 $E = \{\langle x, y \rangle \in V \times V \mid x \neq y \wedge x$ は y の倍数 $\}$.

(a) グラフ G_2 を図示せよ。

答. 図 2 のようになる。

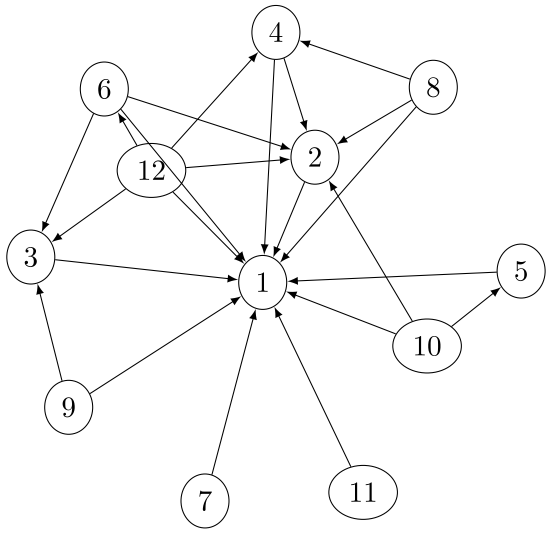

図 2: グラフ G_2

(b) 頂点 2 と 3 の出次数と入次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 2 の入次数は 5, 出次数は 1 である。頂点 3 の入次数は 3, 出次数は 1 である。

(c) 頂点 12 から 1 への単純道の個数を求めよ。

答. 以下の 8 個存在する。

$$\langle 12, 6, 3, 1 \rangle, \langle 12, 6, 2, 1 \rangle, \langle 12, 6, 1 \rangle, \langle 12, 4, 2, 1 \rangle, \langle 12, 4, 1 \rangle, \langle 12, 3, 1 \rangle, \langle 12, 2, 1 \rangle, \langle 12, 1 \rangle$$

(d) グラフ G_2 において最長の単純道とその長さを求めよ。

答. 素因数分解すると $12 = 2^2 \cdot 3$ であるため、$\langle 12, 6, 3, 1 \rangle$ が最長の単純道であり、その長さは 3 である。

(e) グラフ G_2 のサイズと位数を求めよ。

答. サイズは $11+5+3+2+1+1=23$、位数は 12 である。

(f) グラフ G_2 の強連結成分の個数を求めよ。

答. 12 個。

問題 3 (木に関する推論)

(a) 高さ 2 以下の 2 分木で異なるもの（同型でないもの）がいくつあるか答えよ。

答. 図 3 に示すように 9 個存在する。

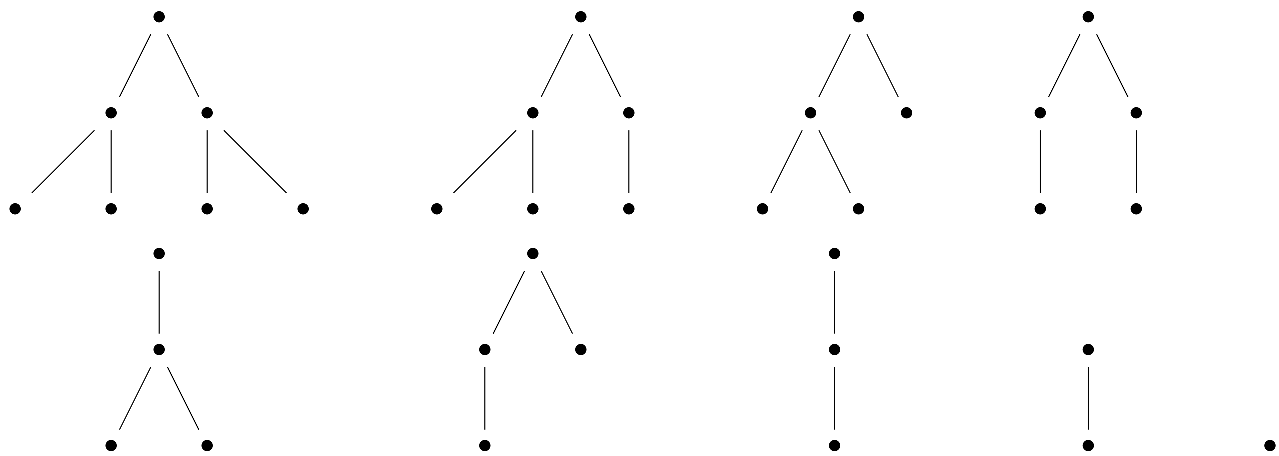

図 3: 高さ 2 以下の同型でない 2 分木