『離散構造』演習問題 No.4 解答例 (海野)

有理数の集合 $\mathcal{Q}$ 上の 2 項関係 R, S, T, U, V を以下のように定める。

$$
\begin{aligned}
x\ R\ y &\iff \exists z \in \mathcal{Q}(z \geq 1 \land y = z \cdot x) \\
x\ S\ y &\iff \exists z \in \mathcal{Q}(z > 0 \land y = z \cdot x) \\
x\ T\ y &\iff |x - y| \leq 0.01 \\
x\ U\ y &\iff x\ R\ y \lor y\ R\ x \\
x\ V\ y &\iff x\ R\ y \land y\ R\ x
\end{aligned}
$$

問題 1 (関係の性質)

(a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるか否かをそれぞれ理由をつけて答えよ。反例がある場合はそれを示すこと。

答.

- 次の理由により反射的である。z として 1 をとれば、 $x\ R\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により対称的でない。$1\ R\ 2$ は成り立つが、$2\ R\ 1$ は成り立たない。
- 次の理由により推移的である。 $x\ R\ y$ かつ $y\ R\ z$ と仮定すると、$y = vx$ かつ $z = wy$ を満たす $v, w \geq 1$ が存在する。したがって、$vw \geq 1$ かつ $z = vwx$ であるため、$x\ R\ z$ が成り立つ。
- 次の理由により反対称的である。$x\ R\ y$ かつ $y\ R\ x$ と仮定すると、$y = vx$ かつ $x = wy$ を満たす $v, w \geq 1$ が存在する。そのような v, w は $vw = v = w = 1$ を満たすので、$x = y$ が成り立つ。
- 次の理由により半順序である。R は反射的、推移的、反対称的である。
- 次の理由により同値関係でない。R は対称的ではない。

(b) S について同様のことを答えよ。

答.

- 次の理由により反射的である。S として 1 をとれば、 $x\ S\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により対称的である。$x\ S\ y$ と仮定すると $y = vx$ となる $v > 0$ が存在する。したがって、$x = \frac{1}{v} \cdot y$ かつ $\frac{1}{v} > 0$ であるため、$y\ S\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により推移的である。 $x\ S\ y$ かつ $y\ S\ z$ と仮定すると、$y = vx$ かつ $z = wy$ を満たす $v, w > 0$ が存在する。したがって、$vw > 0$ かつ $z = vwx$ であるため、$x\ S\ z$ が成り立つ。
- 次の理由により反対称的でない。$1\ S\ 2$ かつ $2\ S\ 1$ は成り立つが、$1 = 2$ でない。
- 次の理由により半順序でない。S は反対称的でない。
- 次の理由により同値関係である。S は反射的、対称的、推移的である。

(c) T について同様のことを答えよ。

答.

- 次の理由により反射的である。$|x - x| = 0 \leq 0.01$ であるため $x\ T\ x$ が成り立つ。

- 次の理由により対称的である。$x\ T\ y$ と仮定すると $|x-y| \leq 0.01$ が成り立つ。したがって、$|y-x| \leq 0.01$ であり、$y\ T\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により推移的でない。 $0\ T\ 0.006$ かつ $0.006\ T\ 0.012$ であるが、$0\ T\ 0.012$ が成り立たない。
- 次の理由により反対称的でない。$0\ T\ 1$ かつ $1\ T\ 0$ は成り立つが、$0=1$ でない。
- 次の理由により半順序でない。T は推移的でない。
- 次の理由により同値関係でない。T はは推移的でない。

(d) U について同様のことを答えよ。

答.

$$\begin{aligned} x\ U\ y &\Leftrightarrow x\ R\ y \vee y\ R\ x \\ &\Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{Q}(z \geq 1 \wedge y = z \cdot x) \vee \exists z \in \mathcal{Q}(z \geq 1 \wedge y = \frac{1}{z} \cdot x) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{Q}(z > 0 \wedge y = z \cdot x) \\ &\Leftrightarrow x\ S\ y \end{aligned}$$

となる。したがって、S の解答と同様。

別解.

- 次の理由により反射的である。R は反射的であるため $x\ U\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により対称的である。$x\ U\ y$ と仮定すると $x\ R\ y$ または $y\ R\ x$ が成り立つ。どちらの場合も $y\ R\ x \vee x\ R\ y$ が成り立つので $y\ U\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により推移的である。$x\ U\ y$ かつ $y\ U\ z$ と仮定すると、$x\ R\ y \vee y\ R\ x$ かつ $y\ R\ z \vee z\ R\ y$ である。以下の 4 つの場合それぞれについて $x\ R\ z \vee z\ R\ x$ であることを示す。
  - $x\ R\ y$ かつ $y\ R\ z$ の場合: R は推移的なので $x\ R\ z$ である。したがって、$x\ R\ z \vee z\ R\ x$ が成り立つ。
  - $x\ R\ y$ かつ $z\ R\ y$ の場合: R の定義より、$y = vx$ かつ $y = wz$ を満たす $v, w \geq 1$ が存在する。したがって、$z = \frac{v}{w} \cdot x$ である。$v \geq w$ のとき $x\ R\ z$ であり、それ以外のとき $z\ R\ x$ であるため、$x\ R\ z \vee z\ R\ x$ が成り立つ。
  - $y\ R\ x$ かつ $y\ R\ z$ の場合: R の定義より、$x = vy$ かつ $z = wy$ を満たす $v, w \geq 1$ が存在する。したがって、$x = \frac{v}{w} \cdot z$ である。$v \geq w$ のとき $z\ R\ x$ であり、それ以外のとき $x\ R\ z$ であるため、$x\ R\ z \vee z\ R\ x$ が成り立つ。
  - $y\ R\ x$ かつ $z\ R\ y$ の場合: R は推移的なので $z\ R\ x$ である。したがって、$x\ R\ z \vee z\ R\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により反対称的でない。$0\ U\ 1$ かつ $1\ U\ 0$ は成り立つが、$0=1$ でない。
- 次の理由により半順序でない。U は反対称的でない。
- 次の理由により同値関係である。U は反射的、対称的、推移的である。

(e) V について同様のことを答えよ。

答. R は反対称的であるため、 $x\ V\ y \Leftrightarrow x\ R\ y \wedge y\ R\ x \Leftrightarrow x = y$ である。

- 次の理由により反射的である。$x\ V\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により対称的である。$x\ V\ y$ と仮定すると $y\ V\ x$ が成り立つ。
- 次の理由により推移的である。$x\ V\ y$ かつ $y\ V\ z$ と仮定すると $x\ V\ z$ が成り立つ。

- 次の理由により反対称的である。$x\ V\ y$ かつ $y\ V\ x$ と仮定すると $x = y$ が成り立つ。
- 次の理由により半順序である。T は反射的、推移的、反対称的である。
- 次の理由により同値関係である。T は反射的、対称的、推移的である。

問題 2 (関係の合成)

(a) $R \circ R = R$ であることを示せ。

答.

- $R \circ R \subset R$ を示す。$x\ (R \circ R)\ y$ とすると、関係の合成の定義より $x\ R\ z$ かつ $z\ R\ y$ となる $z \in \mathcal{Q}$ が存在する。R は推移的なので $x\ R\ y$ が成り立つ。
- $R \subset R \circ R$ を示す。$x\ R\ y$ と仮定する。R は反射的なので $x\ R\ x$ である。したがって、$\exists z \in \mathcal{Q}(x\ R\ z \wedge z\ R\ y)$ が成り立つ。よって、$x\ (R \circ R)\ y$ である。

(b) $0\ T^{10}\ x$ を満たす $x \in \mathcal{Q}$ のうち、最小のものと最大のものをそれぞれ求めよ。

答. 関係のべき乗の定義より、$x\ T^n\ y \Leftrightarrow \exists x_0, \ldots, x_n(x = x_0\ T\ x_1\ T \cdots T\ x_{n-1}\ T\ x_n = y) \Leftrightarrow |x - y| \leq 0.01 \cdot n$ である。したがって、$x\ T^{10}\ y \Leftrightarrow |x - y| \leq 0.1$ であり、最小のものは -0.1、最大のものは 0.1 である。

問題 3 (閉包) $x\ W\ y \Leftrightarrow y = x + 1$ と定義される $\mathcal{N}$ 上の 2 項関係 W について以下の問いに答えよ。

(a) 関係 W に要素を追加して反射的な関係を作ることを考える。そのように作られる関係の中で、集合として最小のもの X（W の反射閉包という）を求めよ。

答. 次の理由により $x\ X\ y \Leftrightarrow x\ W\ y \vee x = y$ と定義される X は題意を満たす。

- X は反射的である。
- $W \subset X$ である。
- X は上の 2 条件を満たす関係のうち集合として最小である。実際、上の 2 条件を満たす（つまり反射的で W を包含する）任意の関係を A とすると、$\forall x, y \in \mathcal{N}(x\ W\ y \Rightarrow x\ A\ y)$ かつ $\forall x \in \mathcal{N}(x = y \Rightarrow x\ A\ y)$ であるため、$x\ X\ y$ を満たす任意の $x, y \in \mathcal{N}$ について $x\ A\ y$ が成り立つ。

(b) 関係 X に要素を追加して推移的な関係を作ることを考える。そのように作られる関係の中で、集合として最小のもの Y（X の推移閉包という）を求めよ。

答. 次の理由により $x\ Y\ y \Leftrightarrow y \geq x$ と定義される Y は題意を満たす。

- Y は推移的である。
- $X \subset Y$ である。
- Y は上の 2 条件を満たす関係のうち集合として最小である。そのことを示すために、上の 2 条件を満たす（つまり推移的で X を包含する）任意の関係 B と、$x\ Y\ y$ を満たす任意の $x, y \in \mathcal{N}$ について $x\ B\ y$ が成り立つことを証明する。Y の定義と $x\ Y\ y$ より、$x\ W^{(y-x)}\ y$ が成り立つ。関係のべき乗の定義と $W \subset X \subset B$ より、$x\ B^{(y-x)}\ y$ が成り立つ。B は推移的かつ反射的（反射的である X を包含するので）であるため、$x\ B\ y$ がいえる。

(c) 関係 Y が半順序関係であるか否かを理由をつけて答えよ。

答. $\mathcal{N}$ 上の関係 $\geq$ は反射的、推移的、反対称的であるため、Y は半順序である。