『離散構造』 演習問題 No.3 (亀山) 解答例

以下の問題で、集合 $\mathcal{N}_{11}$ というのは、$\{n \in \mathcal{N} \mid 0 \leq n < 11\}$ となる集合、つまり、0 以上 11 未満の整数の集合のことである。

問 1 (像、逆像、全射、単射、合成、逆関数)

$a \in \mathcal{N}_{11}$ に対して、関数 $f_a : \mathcal{N}_{11} \to \mathcal{N}_{11}$ を，$f_a(x) = (a \cdot x + 1) \mod 11$ と定める．ただし， mod は，自然数上の割算の余りを求める演算とする。たとえば、$7 \mod 3 = 1$ である。

(a) $S = \{1, 2, 3\}$ とし、f_7 による S の像 $f_7(S)$ を計算しなさい。

解答例. 「像」の定義により、$f_7(\{1, 2, 3\}) = \{f_7(1), f_7(2), f_7(3)\}$ であり、これは $\{8, 4, 0\}$ となる。

(b) $S = \{1, 2, 3\}$ とし、f_7 による S の逆像 $f_7^{-1}(S)$ を計算しなさい。

解答例. 「逆像」の定義により、$f_7^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{x \in \mathcal{N}_{11} \mid f_7(x) \in \{1, 2, 3\}\}$ である。これを計算するため、すべての $x \in \mathcal{N}_{11}$ に対して $f_7(x)$ の値を計算すると、$x = 0, 8, 5$ のとき、および、そのときに限り $f_7(x) \in \{1, 2, 3\}$ となることがわかる。よって、$f_7^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{0, 5, 8\}$ である。

(c) 関数 f_7 が全単射になるかどうか調べなさい。

解答例. $f_7 : \mathcal{N}_{11} \to \mathcal{N}_{11}$ について、$x = 0, 1, 2, \cdots, 10$ に対する $f_7(x)$ の値は、$1, 8, 4, 0, 7, 3, 10, 6, 2, 9, 5$ となる。

$f_7(\mathcal{N}_{11}) = \mathcal{N}_{11}$ となるので f_7 は全射である。また、すべての $x, y \in \mathcal{N}_{11}$ に対して $x \neq y$ ならば $f_7(x) \neq f_7(y)$ となるので、f_7 は単射である。以上から、f_7 は全単射である。

(d) f_a が f_b の逆関数となるための a と b の条件 (必要十分条件) を求めなさい。

解答例. f_a が f_b の逆関数となるので、すべての $x \in \mathcal{N}_{11}$ に対して、$f_a(f_b(x)) = x$ である。$x = 0$ の場合を考えると、$f_a(f_b(0)) = (a + 1) \mod 11 = 0$ となるので、$a = 10$ である。($a \in \mathcal{N}_{11}$ であることに注意せよ。) 同様に $f_b(f_a(0)) = 0$ であることを使って $b = 10$ が導ける。

以上から、f_a と f_b が逆関数ならば、$a = b = 10$ でなければならない。

逆に、$a = b = 10$ ならば f_a と f_b が逆関数であることを示そう。このためには $f_{10} \circ f_{10}$ が恒等関数であることを示せばよい。

f_{10} は $x = 0, 1, 2, \cdots, 10$ をそれぞれ $1, 0, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$ にうつす。そこで、$f_{10} \circ f_{10}$ は、$x = 0, 1, 2, \cdots, 10$ をそれぞれ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ にうつす。よって、$f_{10} \circ f_{10}$ は恒等関数であり、f_{10} の逆関数は f_{10} である。

以上から、f_a が f_b の逆関数となる必要十分条件は $a = b = 10$ である。

問 2 (関数の例)

(a) すべての自然数の集合 $\mathcal{N}$ から、すべての偶数の集合への単射を 1 つ示しなさい。

解答例. いろいろな例があるが、たとえば、$f(x) = 2x$ は自然数の集合から偶数の集合への単射である。(ほかには $f(x) = 6x$ など。)

理由: $x \neq y$ とすると $f(x) = 2x \neq 2y = f(y)$ となるので。

(b) $\mathcal{R}$ をすべての実数の集合とする。集合 $\{r \in \mathcal{R} \mid 0 < r < 1\}$ から集合 $\{r \in \mathcal{R} \mid 1 < r\}$ への全射を 1 つ示しなさい。

解答例. いろいろな例があるが、たとえば、$g(r) = 1/r$ は上記の集合間の全射となる。

理由: コドメインの任意の値 y をとる。y は $1 < y$ を満たす実数である。$1/y$ は 0 より大きく 1 より小さい実数であるので集合 $\{r \in \mathcal{R} \mid 0 < r < 1\}$ の要素である。また、$g(1/y) = y$ である。

よって、g は、その定義域のある要素を y にうつす。コドメインの任意の要素 y について、このことが言えたので、全射となる。

(c) 関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ で、f は恒等関数ではないが、$f \circ f$ が恒等関数になるものを 1 つ示しなさい。

解答例. いろいろあるが、一番単純なのは、$f(x) = \text{if even}(x) \text{ then } x+1 \text{ else } x-1$ である。ここで even というのは「偶数である」ことを意味する述語である。f は偶数に 1 を加え、奇数から 1 を引く。

この f が $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への関数となっていること、また、$f \circ f$ が恒等関数であること、また、f が恒等関数でないことは、いずれも容易に証明できる。

このほかの例としては、$f(x) = \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else if } x = 1 \text{ then } 0 \text{ else } x$ などもある。

問 3 (関数の性質)

(a) すべての関数 $f : S \to T$ および $g : T \to U$ に対して、f と g が全射ならば、$g \circ f$ は全射であることを示しなさい。

解答例. $g \circ f$ は S から U への関数である。$g \circ f$ が全射であることを示すためには、任意の $z \in U$ に対して、$(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in S$ が存在することを示せばよい。

そこで、任意の $z \in U$ を取る。g は全射なので、ある $y \in T$ に対して $g(y) = z$ となる。(そのような y が存在する。) また、f は全射なので、ある $x \in S$ に対して $f(x) = y$ となる。(そのような x が存在する。)

そのような x に対して、$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となる。よって、上記のことが言えた。

別の解答. 「関数 $h : X \to Y$ が全射である」というのは、像を使って、$h(X) = Y$ と定義することができる。これを使って本問を解くと、$(g \circ f)(S) = g(f(S)) = g(T) = U$ となり、$g \circ f : S \to U$ が全射であることが言える。

(b) 「すべての関数 $f : S \to T$ および $g : T \to U$ に対して、$g \circ f$ が単射ならば、f は単射である」かどうか調べ、正しいなら証明し、正しくないなら反例を示しなさい。

解答例. これは正しいので証明する。

f が単射であることを示すためには、任意の $x, y \in S$ に対して「$f(x) = f(y)$ ならば $x = y$」を示ばよい。そこで、任意の $x, y \in S$ を取り、$f(x) = f(y)$ と仮定する。

g は関数なので、$g(f(x)) = g(f(y))$ である。よって、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ である。ここで $g \circ f$ は単射なので、$x = y$ である。

以上から、$f(x) = f(y)$ という仮定から $x = y$ が導けたので、f は単射である。

別の解答. f が単射でないと仮定して矛盾を導こう。

f が単射でないと仮定する。すると、ある $x, y \in S$ に対して、$x \neq y$ かつ $f(x) = f(y)$ となる。これより $g(f(x)) = g(f(y))$ となり、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ となる。ところで、$x \neq y$ と、$g \circ f$ が単射であることから、$(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ であるので、矛盾する。

以上から、f が単射でないという仮定から矛盾が導けたので、f は単射である。

(c) 有限集合 S, T の要素数をそれぞれ $5, 4$ とする。$f : S \to T$ となる単射と全射が、それぞれいくつあるかを計算しなさい。

解答例. 定義域 S の要素数が、コドメイン T の要素数より多いので、S から T への単射は存在しない。よって、単射は 0 個である。

全射の個数をカウントするのは注意深くやらないといけない。まず、定義域の 5 個の要素のうち 2 個は、f により、T の同じ要素に対応付けられ、残りの 3 個の要素は、f により T の相異なる要素 (さらに最初の 2 個とも異なる要素) に対応付けられる。残りの 3 要素を、T のどの要素に対応付けるかを決めたら、最初の 2 要素の対応付けも決まる。

(1) 5 個の相異なる要素から 2 個の要素を取る組合せの数は $5*4/2 = 10$ 通りである。

(2) そのそれぞれの場合において、残り 3 要素を T の 4 要素のどれに対応付けるかの組合せの数は $4*3*2 = 24$ 通りある。

上記の (1) と (2) をかけあわせると全ての場合となり 240 通りであり、そのそれぞれが、相異なる全射を定める。

よって、全射は 240 個ある。