『離散構造』 演習問題 No.1 の解答例 (亀山)

以下の問題について、次回の演習実施日までに解答を用意せよ。

問 1 次の日本語の文を、命題論理の論理式として表現しなさい。基本命題として，以下のものを使うこととする.

P: 「今日の天気は曇りである。」、Q: 「今日の天気は雨である。」、R: 「洗濯物が乾く。」、S: 「奥さんの機嫌がよい。」、U: 「私の気分は悪い。」（この基本命題を T と書くと混乱するので U とする。）

(a) 今日の天気は曇りか雨である。 **答の一例.** $P \vee Q$.

(b) 今日の天気が曇りならば、私は気分が悪い。 **答の一例.** $P \Rightarrow U$.

(c) 今日の天気が雨ならば、洗濯物が乾かない。 **答の一例.** $Q \Rightarrow (\neg R)$.

(d) 奥さんの機嫌がよいのは、洗濯物が乾くとき、およびそのときに限る。 **答の一例.** $S \Leftrightarrow R$. （あるいは $(S \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)$.)

(e) 奥さんの機嫌がよくなければ、私の気分は悪い。 **答の一例.** $(\neg S) \Rightarrow U$.

上記の 5 つの命題が全て真のとき、「私の気分は悪い。」が必ず真であるかどうか、真理値表を使って調べなさい。

答. 以下の通り （(a) から (e) までの論理式の部分論理式の記載は省略した.）

まず P が T のときの真理値表 (上半分)：

P	Q	R	S	U	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)-(e) が全て T
T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	no
T	T	T	T	F	T	F	F	T	T	no
T	T	T	F	T	T	T	F	F	T	no
T	T	T	F	F	T	F	F	F	F	no
T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	no
T	T	F	T	F	T	F	T	F	T	no
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	yes
T	T	F	F	F	T	F	T	T	F	no
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	yes
T	F	T	T	F	T	F	T	T	T	no
T	F	T	F	T	T	T	T	F	T	no
T	F	T	F	F	T	F	T	F	F	no
T	F	F	T	T	T	T	T	F	T	no
T	F	F	T	F	T	F	T	F	T	no
T	F	F	F	T	T	T	T	T	T	yes
T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	no

ここで 一番右の欄が yes になっている場合は、すべて U は真 (T) である.

次に P が F のときの真理値表 (下半分)：

P	Q	R	S	U	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)-(e) が全て T
F	T	T	T	T	T	T	F	T	T	no
F	T	T	T	F	T	T	F	T	T	no
F	T	T	F	T	T	T	F	F	T	no
F	T	T	F	F	T	T	F	F	F	no
F	T	F	T	T	T	T	T	F	T	no
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	no
F	T	F	F	T	T	T	T	T	T	yes
F	T	F	F	F	T	T	T	T	F	no
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T	no
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T	no
F	F	T	F	T	F	T	T	F	T	no
F	F	T	F	F	F	T	T	F	F	no
F	F	F	T	T	F	T	T	F	T	no
F	F	F	T	F	F	T	T	F	T	no
F	F	F	F	T	F	T	T	T	T	no
F	F	F	F	F	F	T	T	T	F	no

ここで 一番右の欄が yes になっている場合は、すべて U は真 (T) である.

以上から，(a) から (e) の命題が全て真のときは必ず,「私の気分は悪い」は真である.

問 2

次の日本語の文に対して、適切な基本命題を選んだ上で、述語論理の論理式として表現しなさい。

注. この問題は，この授業の演習問題としては難しすぎたので，お詫びする．ここには解答を書いておくが，これらが全部解けないといけないという意味ではないので，がっかりしないでほしい.

(a) 全ての筑波大生には、尊敬する先生か尊敬する先輩がいるが、筑波大生全員から尊敬されている人間はいない。(注: 「先生」と「先輩」は、「人間」であるとしてください。)

答.

命題 $T(x)$ を「x が筑波大生である」，命題 $I(x)$ を「x が先生である」，命題 $S(x)$ を「x が先輩である」，命題 $H(x)$ を「x が人間である」，命題 $R(x,y)$ を「x が y を尊敬する」とする.

すると，「全ての筑波大生には、尊敬する先生か尊敬する先輩がいる」は,

$$\forall x\ (T(x) \Rightarrow (\exists y\ (R(x,y) \wedge (I(x) \vee S(x)))))$$

と定式化できる.

ここでポイントとなるのは，$\forall$ と $\exists$ の使い方であり，$\forall x\ (T(x) \Rightarrow A)$ という論理式は,「すべての x に対して，x が筑波大生ならば A である」ということなので，要するに,「すべての筑波大生は A である」という意味になる.

また，$\exists y\ (I(x) \wedge C)$ という論理式は,「ある y に対して，y が先生であり B である」ということなので，要するに,「先生であって B である人がいる」という意味になる.

次に,「筑波大生全員から尊敬されている人間はいない。」は,

$$\neg(\exists y\ (H(y) \wedge (\forall x\ (T(x) \Rightarrow R(x,y)))))$$

と定式化できる.

(b) ハムスターを飼っている人は、自分が飼っているすべてのハムスターを愛する。

注意. (これも難しすぎたので解けなくても気にしなくてよい．)

答.

命題 $H(y)$ を「x がハムスターである」，命題 $F(x, y)$ を「x が y を飼う」，命題 $L(x, y)$ を「x が y を愛する」とする．

まず,「x が ハムスターを飼っている」というのは,「x が ハムスターを 1 匹以上飼っている」という意味なので,

$$\exists y\ (F(x, y) \land H(y))$$

となる．よって，問題文は，以下のように定式化できる．

$$\forall x\ ((\exists y\ (F(x, y) \land H(y))) \Rightarrow (\forall y\ (F(x, y) \Rightarrow L(x, y))))$$

これで,「ハムスターを飼っている人はすべて，自分が飼っているハムスターすべてを愛する」という意味になる．

問 3

命題 $(P \lor Q) \Rightarrow R$ と命題 $(P \Rightarrow R) \land (Q \Rightarrow R)$ とが同値かどうか、真理値表を用いて調べなさい。

答.

P	Q	R	$P \lor Q$	$(P \lor Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \land (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

よって，上記の 2 つの命題は同値である．

発展課題

命題論理式に対する充足可能性判定問題は「SAT」と呼ばれ、最初の NP 完全問題として重要な役割を果たしてきた。これについて調べなさい。

また、充足可能性判定問題を解くアルゴリズムやシステムは SAT solver とよばれ、高速 SAT solver は、今日、非常に広い範囲で応用され使われている。これについて調べなさい。