並列代入に対する代入補題の自動証明

坂口和彦

筑波大学 情報学群 情報科学類

2015/3/4 PPL2015

背景

- 単純型付き λ 計算と System F の強正規化定理を Coq で証明

Theorem（強正規化定理）

t が型の付く項ならば、t から始まる簡約列は有限長

[1] $u[x_0 := t_0] \ldots [x_n := t_n]$ とは異ることに注意

背景

- 単純型付き λ 計算と System F の強正規化定理を Coq で証明

Theorem（強正規化定理）

t が型の付く項ならば、t から始まる簡約列は有限長

- 項中の複数の変数を同時に置き換える代入を**並列代入**と呼ぶ:

$$u[x_0, \ldots, x_n := t_0, \ldots, t_n]$$

$= u$ 中の変数 $x_0, \ldots, x_n$ を $t_0, \ldots, t_n$ で置き換えた項 [1]

[1] $u[x_0 := t_0] \ldots [x_n := t_n]$ とは異ることに注意

背景

- 単純型付き λ 計算と System F の強正規化定理を Coq で証明

Theorem（強正規化定理）

t が型の付く項ならば、t から始まる簡約列は有限長

- 項中の複数の変数を同時に置き換える代入を**並列代入**と呼ぶ:

$$u[x_0, \ldots, x_n := t_0, \ldots, t_n]$$
$$= u \text{ 中の変数 } x_0, \ldots, x_n \text{ を } t_0, \ldots, t_n \text{ で置き換えた項}$$ [1]

- 強正規化定理の証明には並列代入が必要

[1] $u[x_0 := t_0] \ldots [x_n := t_n]$ とは異ることに注意

背景

- 単純型付き λ 計算と System F の強正規化定理を Coq で証明

Theorem（強正規化定理）

t が型の付く項ならば、t から始まる簡約列は有限長

- 項中の複数の変数を同時に置き換える代入を**並列代入**と呼ぶ:

$$u[x_0, \ldots, x_n := t_0, \ldots, t_n]$$
$$= u \text{ 中の変数 } x_0, \ldots, x_n \text{ を } t_0, \ldots, t_n \text{ で置き換えた項}$$ [1]

- 強正規化定理の証明には並列代入が必要
- 並列代入に関する基本的な性質をなるべく楽に証明したい

[1] $u[x_0 := t_0] \ldots [x_n := t_n]$ とは異ることに注意

名前による表現の問題点

- 変数の「名前」によって束縛と被束縛を対応付ける項の定義を**名前による表現**と呼ぶ
- 名前による表現は形式的証明に向かない

名前による表現の問題点

- 変数の「名前」によって束縛と被束縛を対応付ける項の定義を**名前による表現**と呼ぶ
- 名前による表現は形式的証明に向かない

$$(\lambda y.\, y\, x)[x := y]$$

名前による表現の問題点

- 変数の「名前」によって束縛と被束縛を対応付ける項の定義を**名前による表現**と呼ぶ
- 名前による表現は形式的証明に向かない
- 束縛変数の名前の付け替えが必要

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.\, y\, x)[x := y] &=_\alpha (\lambda z.\, z\, x)[x := y] \\
&= \lambda z.\, z\, x[x := y] \\
&= \lambda z.\, z\, y
\end{aligned}
$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= x\,(\in \mathbb{N}) \mid (t\,t) \mid (\lambda\,t)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= x\,(\in \mathbb{N}) \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

束縛の位置には変数を書かない

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \qquad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \qquad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,\overset{0}{\overbrace{x}}\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \qquad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

1

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \qquad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2 \quad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2 \quad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

0

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2 \quad)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

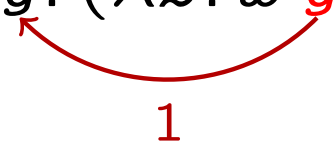
本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$



$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2\ 1)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2\ 1)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2\ 1)$$

De Bruijn 表現 [de Bruijn, 1972]

形式的証明に向いた λ 計算の定義

本研究では λ 項の定義として de Bruijn 表現を用いる:

$$t ::= \underline{x\,(\in \mathbb{N})} \mid (t\,t) \mid \underline{(\lambda\,t)}$$

いくつ外側の λ に対応するかを書く　　束縛の位置には変数を書かない

例:

$$\lambda x.\,\lambda y.\,(\lambda z.\,x\,y)\,x$$

$$\lambda \quad \lambda \quad (\lambda \quad 2\ 1)\ 1$$

De Bruijn 表現での代入の定義

主に２つの定義方法が知られている:

定義	証明向き	実装向き
代入 (1)	○	
代入 (2)		○
並列代入 (1)		
並列代入 (2)	○	○

De Bruijn 表現での代入の定義

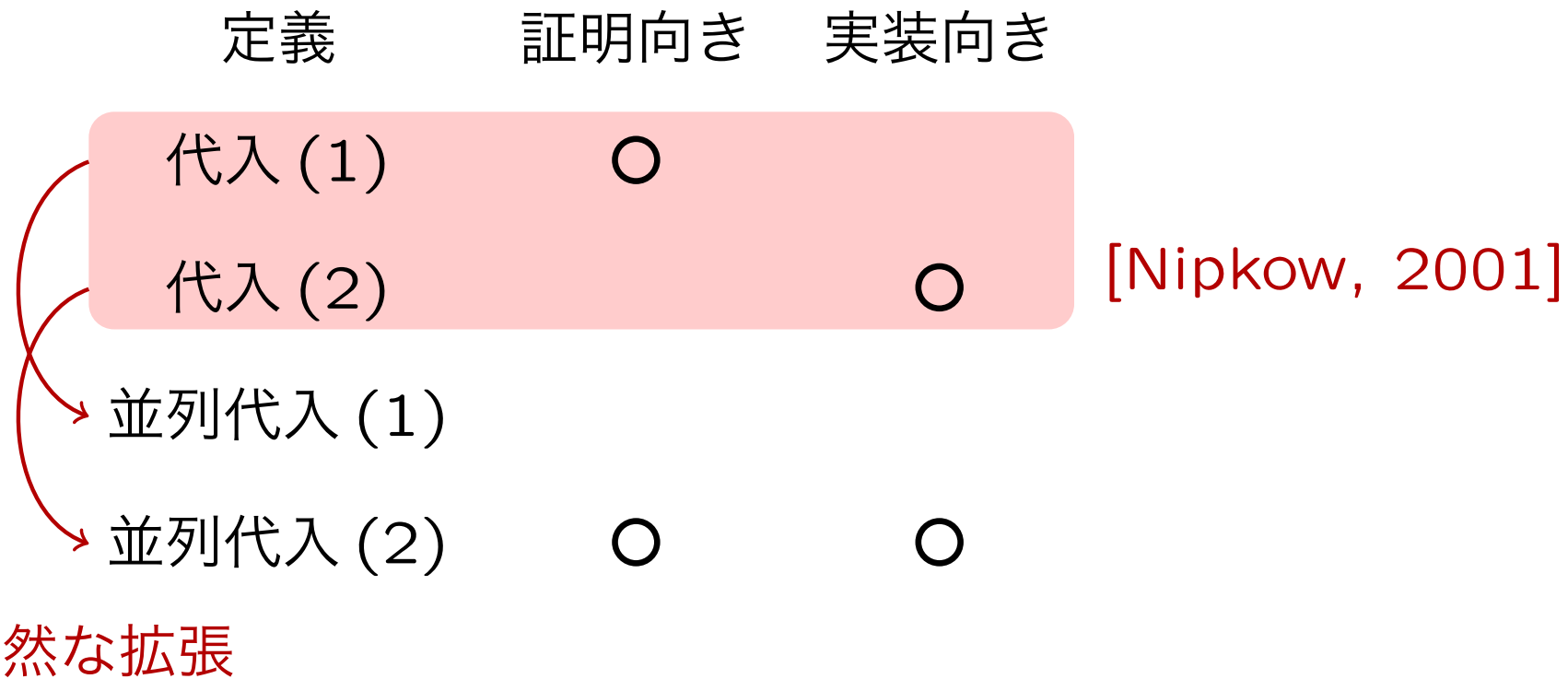
主に２つの定義方法が知られている:

定義	証明向き	実装向き
代入 (1)	○	
代入 (2)		○
並列代入 (1)		
並列代入 (2)	○	○

自然な拡張

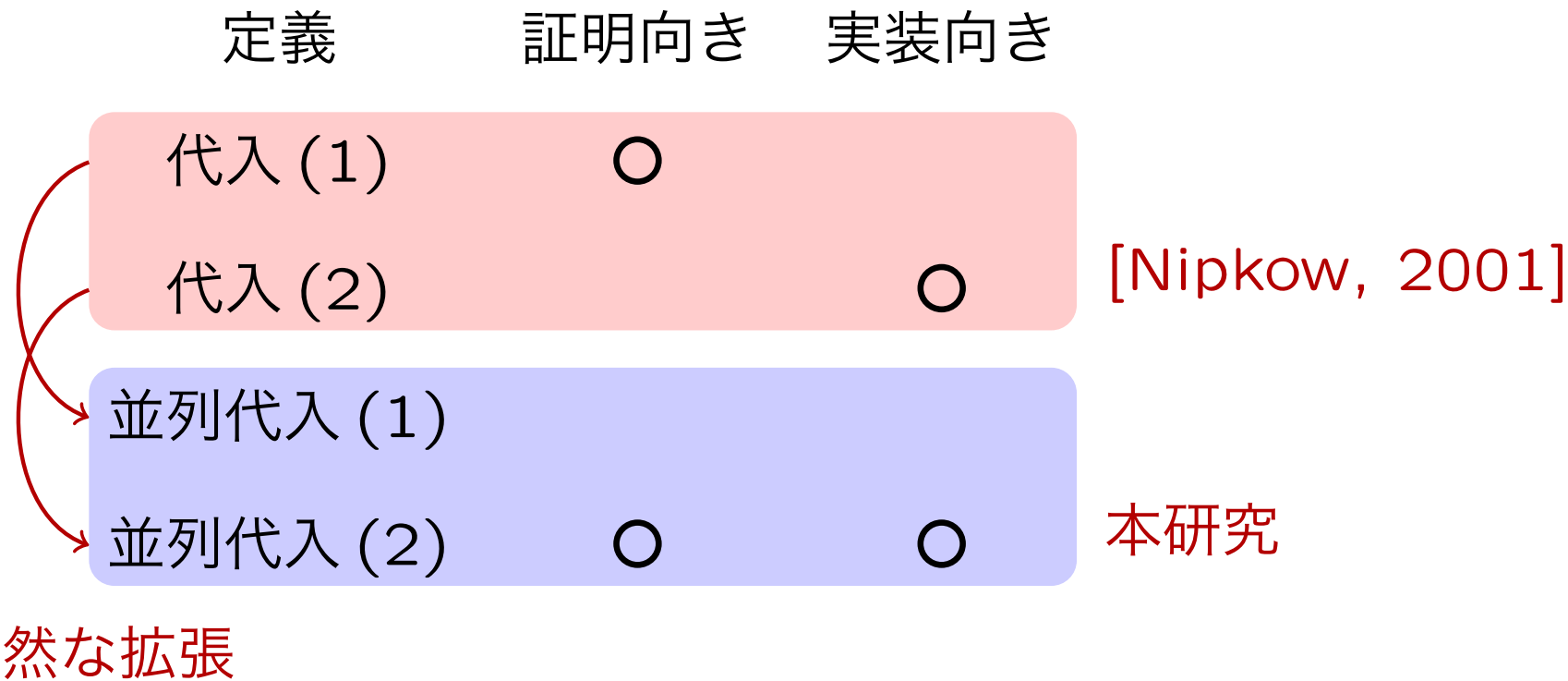
De Bruijn 表現での代入の定義

主に２つの定義方法が知られている:



De Bruijn 表現での代入の定義

主に２つの定義方法が知られている:



研究の概要

定義	証明向き	実装向き
代入 (1)	○	
代入 (2)		○
並列代入 (1)		
並列代入 (2)	○	○

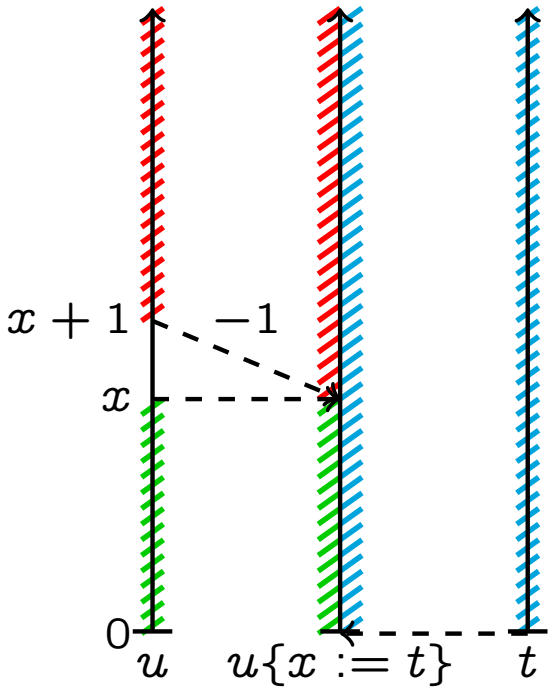
- 並列代入の場合には (2) の定義が証明向き
- 並列代入 (2) に関する代数的性質の (半) 自動証明
- 応用
  - Church-Rosser の定理
  - 強正規化定理

代入 (1) の定義

$$y\{x := t\} = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)\{x := t\} = u\{x := t\}\, v\{x := t\}$$

$$(\lambda\, u)\{x := t\} = \lambda\, u\{x + 1 := t{\uparrow}^1\}$$

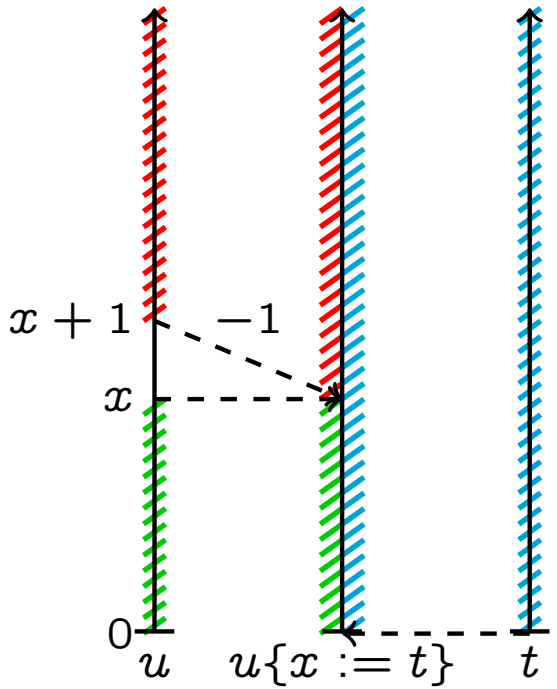


代入 (1) の定義

$$y\{x := t\} = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)\{x := t\} = u\{x := t\}\, v\{x := t\}$$

$$(\lambda\, u)\{x := t\} = \lambda\, u\{x + 1 := t\uparrow^1\}$$



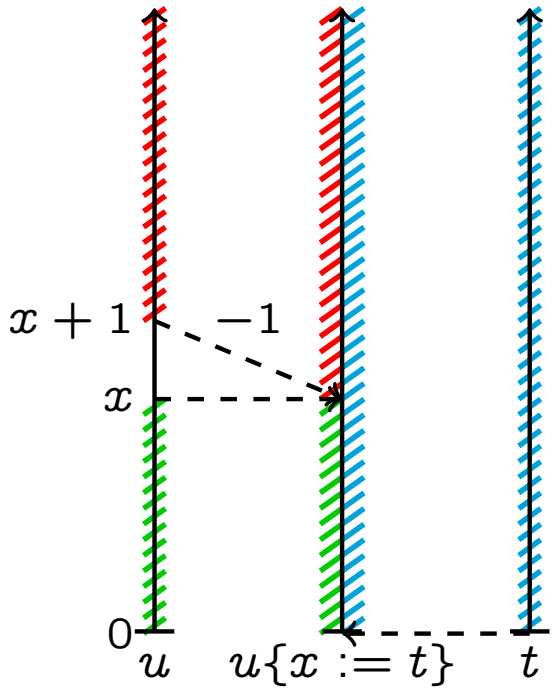
- $\lambda\, u$ の自由変数は u の自由変数として見ると 1 つ大きい

代入 (1) の定義

$$y\{x := t\} = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)\{x := t\} = u\{x := t\}\, v\{x := t\}$$

$$(\lambda\, u)\{x := t\} = \lambda\, u\{x + 1 := t\uparrow^1\}$$



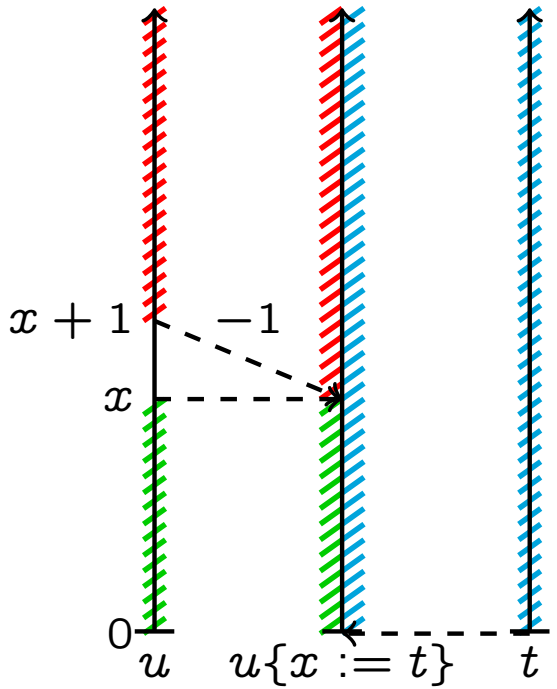
- $\lambda\, u$ の自由変数は u の自由変数として見ると 1 つ大きい
  - 代入位置 x を 1 増やす

代入 (1) の定義

$$y\{x := t\} = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)\{x := t\} = u\{x := t\}\, v\{x := t\}$$

$$(\lambda\, u)\{x := t\} = \lambda\, u\{x + 1 := t\uparrow^1\}$$



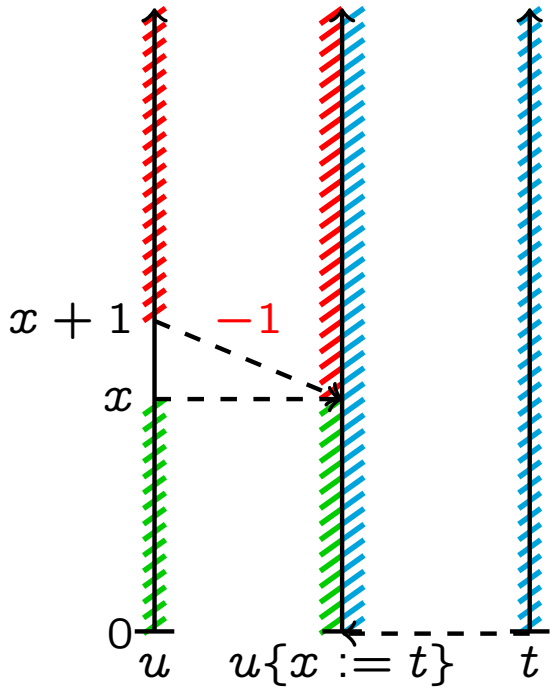
- $\lambda\, u$ の自由変数は u の自由変数として見ると 1 つ大きい
  - 代入位置 x を 1 増やす
  - $t\uparrow^d$ は t 中の全ての自由変数に d を足す項 (シフト)

代入 (1) の定義

$$y\{x := t\} = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)\{x := t\} = u\{x := t\}\, v\{x := t\}$$

$$(\lambda\, u)\{x := t\} = \lambda\, u\{x + 1 := t\uparrow^1\}$$



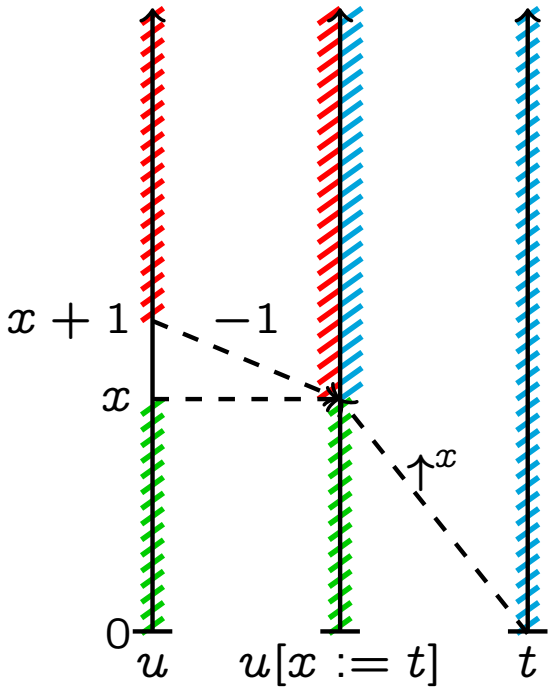
- $\lambda\, u$ の自由変数は u の自由変数として見ると 1 つ大きい
  - 代入位置 x を 1 増やす
  - $t\uparrow^d$ は t 中の全ての自由変数に d を足す項 (シフト)
- 項 $u\{x := t\}$ に元々 u にあった自由変数 x は残らない
  - x より大きい自由変数 y から 1 を引く

代入 (2) の定義

$$y[x := t] = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t{\uparrow}^{x} & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)[x := t] = u[x := t]\, v[x := t]$$

$$(\lambda\, u)[x := t] = \lambda\, u[x + 1 := t]$$

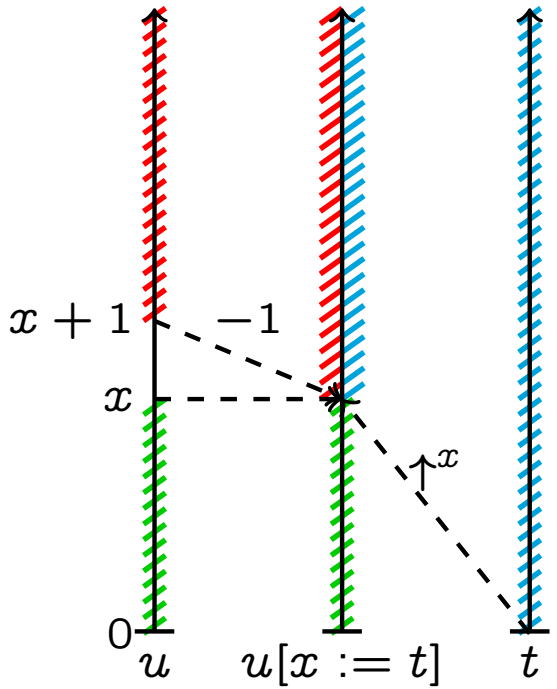


代入 (2) の定義

$$y[x := t] = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t\uparrow^{x} & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

$$(u\, v)[x := t] = u[x := t]\, v[x := t]$$

$$(\lambda\, u)[x := t] = \lambda\, u[x + 1 := t]$$



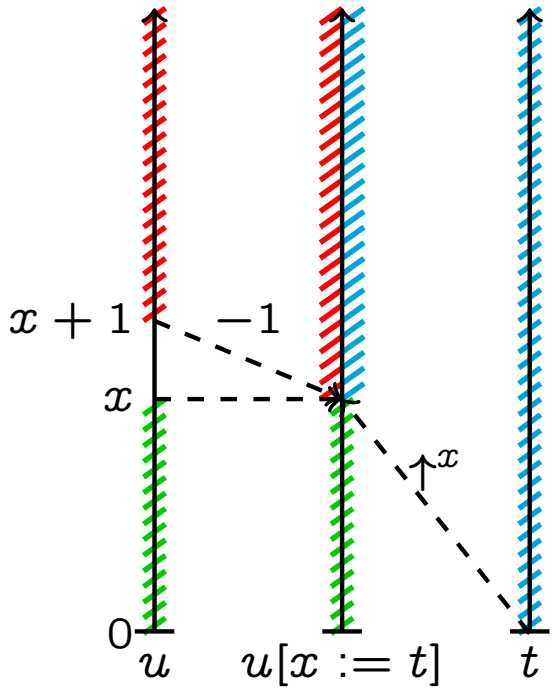
- (1) の定義では代入位置と t に対するシフトの量が同じだけ増える

代入 (2) の定義

$$y[x := t] = \begin{cases} y - 1 & (x < y) \\ t\uparrow^{x} & (x = y) \\ y & (x > y) \end{cases}$$

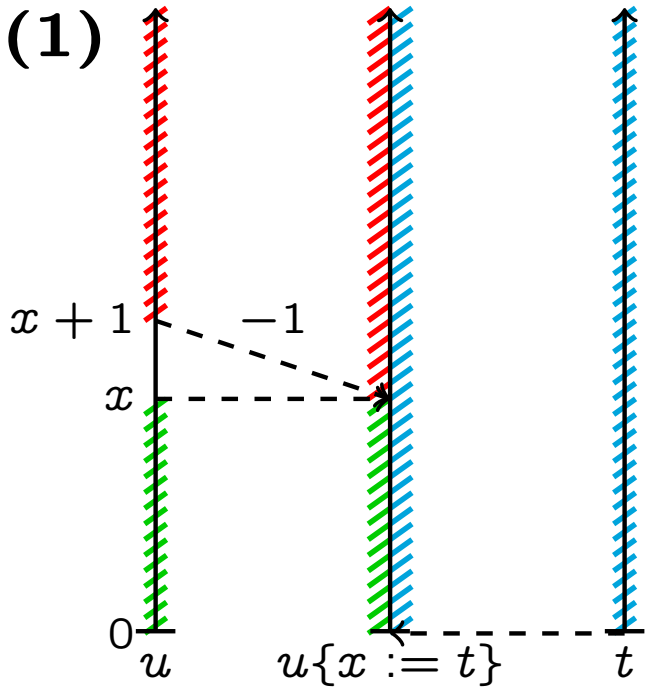
$$(u\, v)[x := t] = u[x := t]\, v[x := t]$$

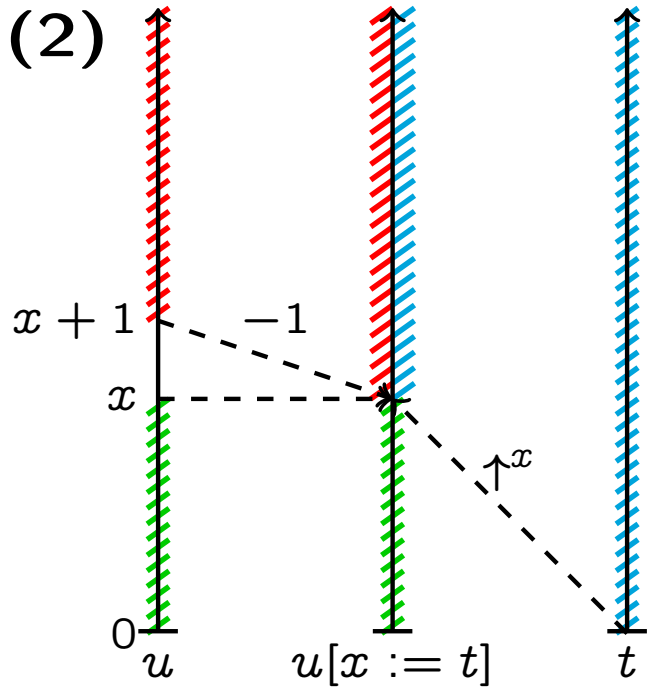
$$(\lambda\, u)[x := t] = \lambda\, u[x + 1 := t]$$



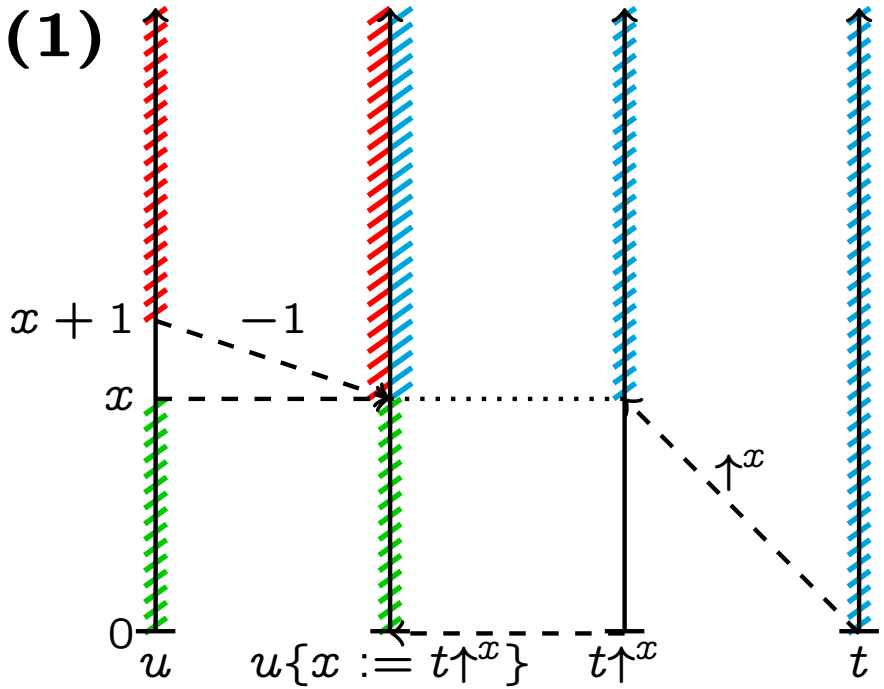
- (1) の定義では代入位置と t に対するシフトの量が同じだけ増える
- 変数を置き換える時点で代入位置の分だけシフトしても同じ
  - $t\underbrace{\uparrow^{1} \ldots \uparrow^{1}}_{d} = t\uparrow^{d}$

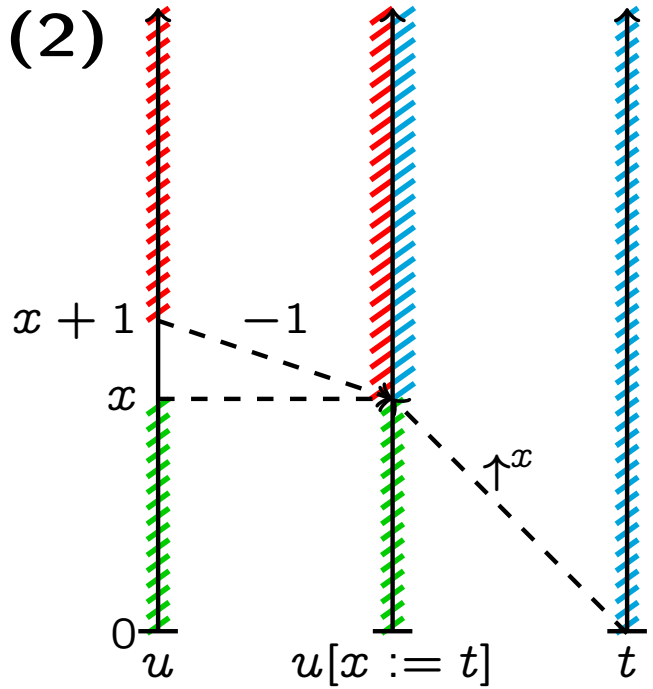
２つの代入の関係



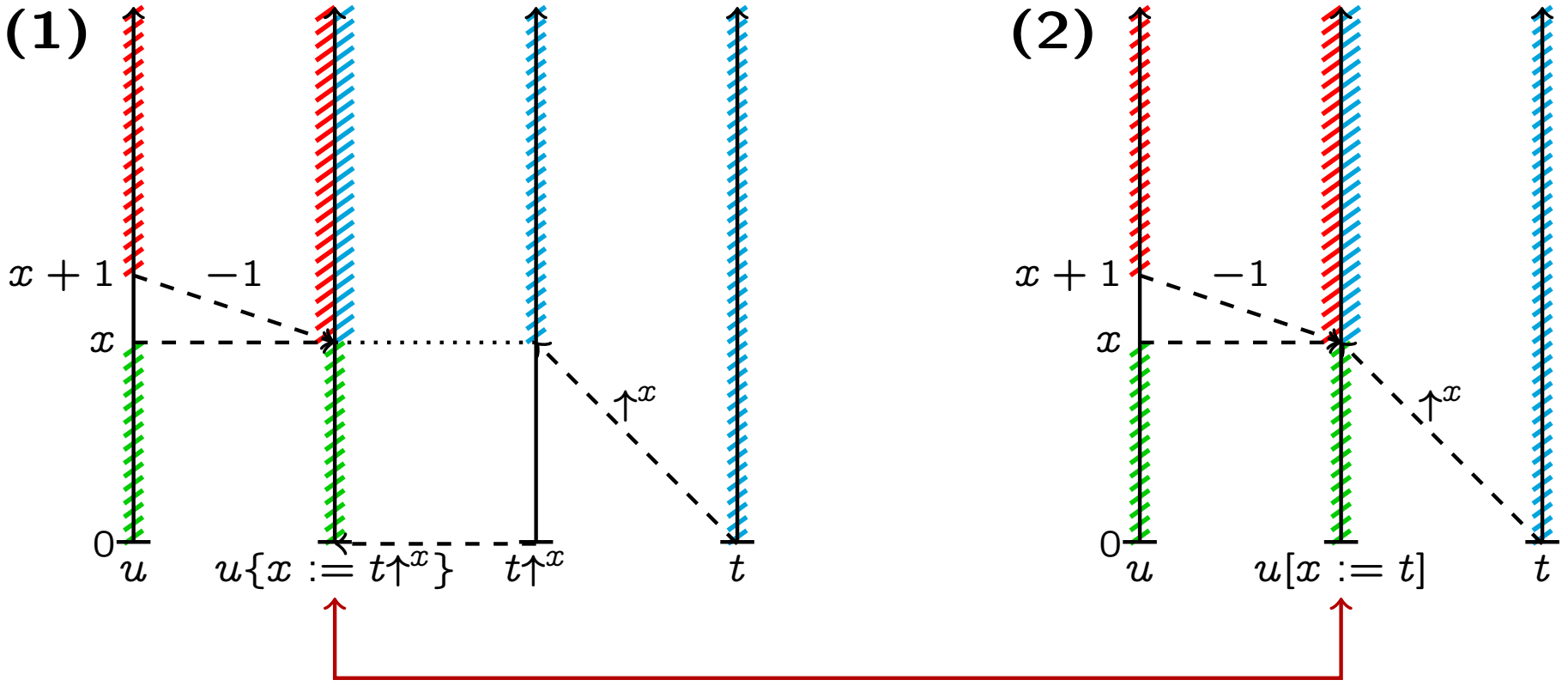


２つの代入の関係


(1)
$x+1$
-1
x
$\uparrow^x$
0
u
$u\{x := t\uparrow^x\}$
$t\uparrow^x$
t

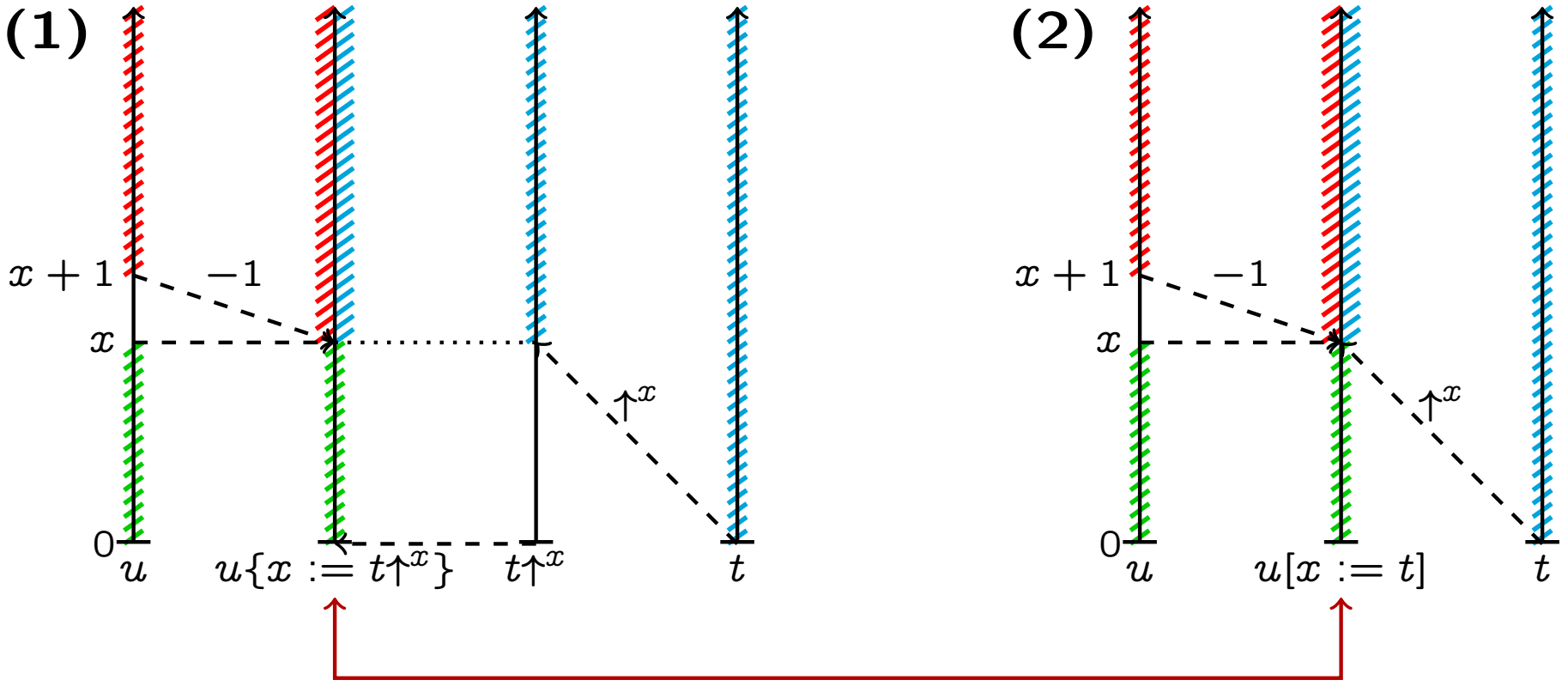

(2)
$x+1$
-1
x
$\uparrow^x$
0
u
$u[x := t]$
t

２つの代入の関係



$$u\{x := t\uparrow^x\} = u[x := t]$$

２つの代入の関係



$$u\{x := t\uparrow^x\} = u[x := t]$$

$$\downarrow \; x = 0$$

$$u\{0 := t\} = u[0 := t]$$

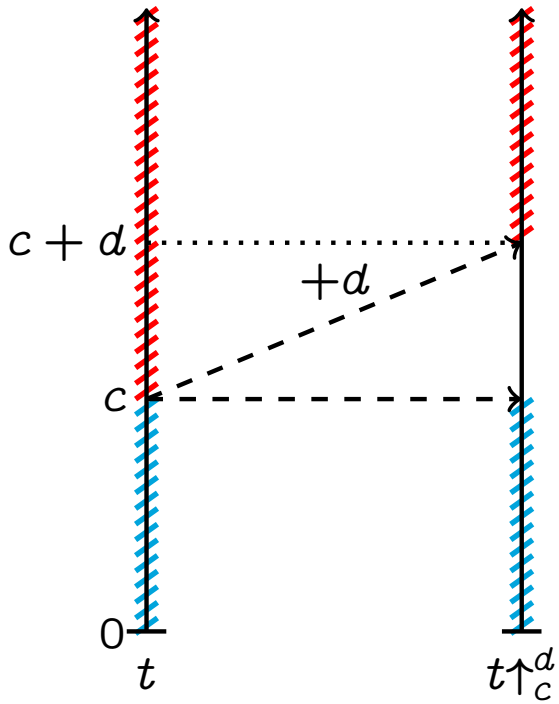
シフトの定義

$$x\uparrow_c^d = \begin{cases} x+d & (c \le x) \\ x & (x < c) \end{cases}$$

$$(t\,u)\uparrow_c^d = t\uparrow_c^d\, u\uparrow_c^d$$

$$(\lambda\, t)\uparrow_c^d = \lambda\, t\uparrow_{c+1}^d$$

$$t\uparrow^d = t\uparrow_0^d$$



シフトの定義

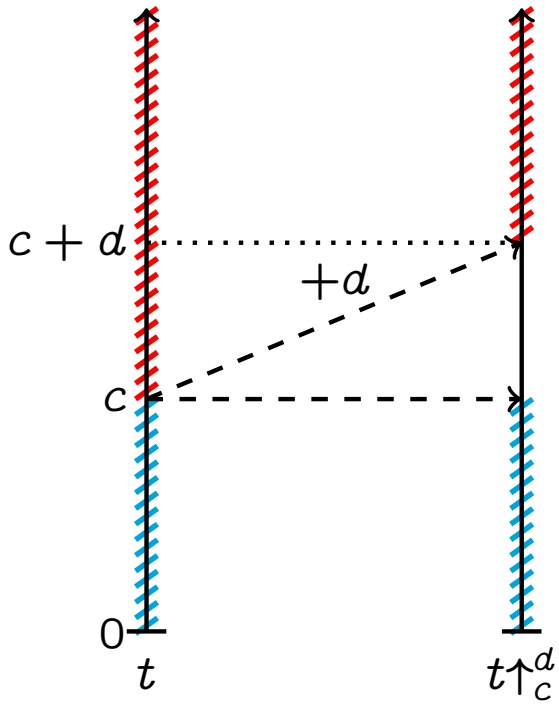
$$x{\uparrow}_c^d = \begin{cases} x + d & (c \leq x) \\ x & (x < c) \end{cases}$$

$$(t\,u){\uparrow}_c^d = t{\uparrow}_c^d\,u{\uparrow}_c^d$$

$$(\lambda\,t){\uparrow}_c^d = \lambda\,t{\uparrow}_{c+1}^d$$

$$t{\uparrow}^d = t{\uparrow}_0^d$$

t 中の全ての自由変数に d を足した項



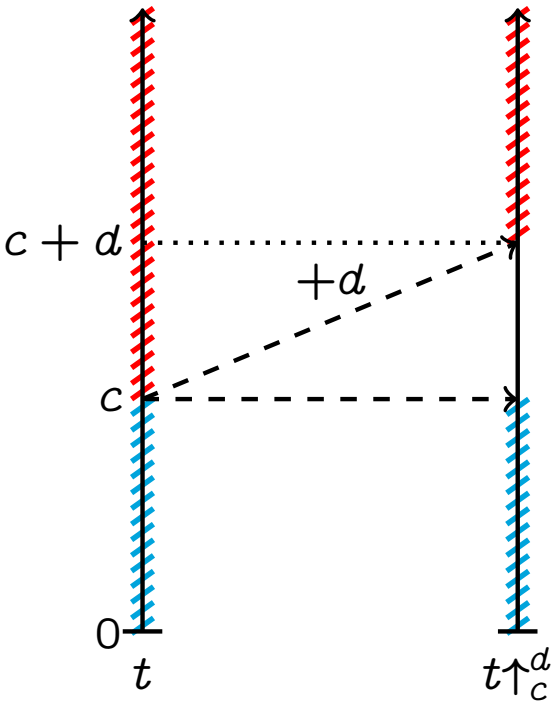
シフトの定義

$$x\uparrow_c^d = \begin{cases} x+d & (c \le x) \\ x & (x < c) \end{cases}$$

$$(t\,u)\uparrow_c^d = t\uparrow_c^d\, u\uparrow_c^d$$

$$(\lambda\, t)\uparrow_c^d = \lambda\, t\uparrow_{c+1}^d$$

$$t\uparrow^d = t\uparrow_0^d$$



t 中の全ての自由変数に d を足した項

一般化

$t\uparrow_c^d$: t 中の c 以上の自由変数に d を足した項

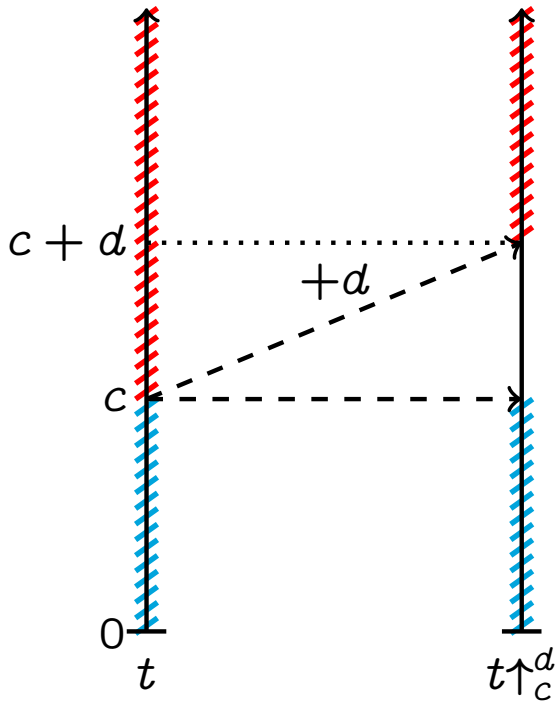
シフトの定義

$$x\uparrow_c^d = \begin{cases} x+d & (c \le x) \\ x & (x < c) \end{cases}$$

$$(t\,u)\uparrow_c^d = t\uparrow_c^d\, u\uparrow_c^d$$

$$(\lambda\, t)\uparrow_c^d = \lambda\, t\uparrow_{c+1}^d$$

$$t\uparrow^d = t\uparrow_0^d$$



t 中の全ての自由変数に d を足した項

一般化 ↓　　↑ $c = 0$

$t\uparrow_c^d$: t 中の c 以上の自由変数に d を足した項

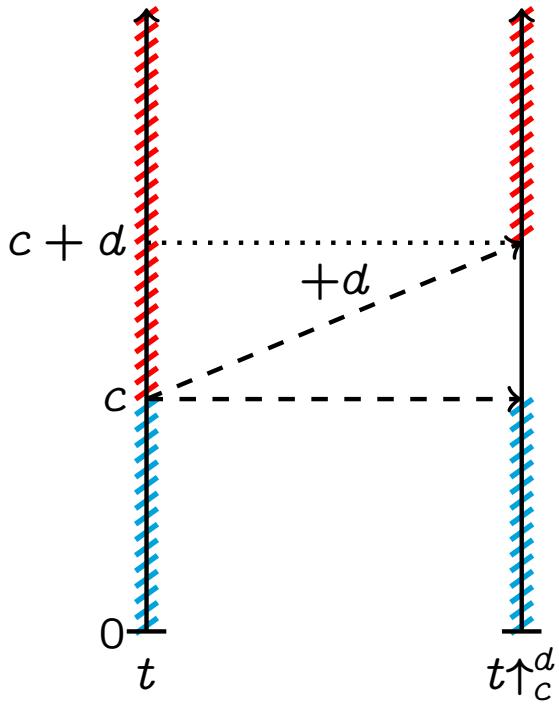
シフトの定義

$$x\uparrow_c^d = \begin{cases} x+d & (c \le x) \\ x & (x < c) \end{cases}$$

$$(t\,u)\uparrow_c^d = t\uparrow_c^d\, u\uparrow_c^d$$

$$(\lambda\, t)\uparrow_c^d = \lambda\, t\uparrow_{c+1}^d$$

$$t\uparrow^d = t\uparrow_0^d$$



t 中の全ての自由変数に d を足した項

一般化 $\downarrow$　　$\uparrow$ $c = 0$

$t\uparrow_c^d$ ： t 中の c 以上の自由変数に d を足した項

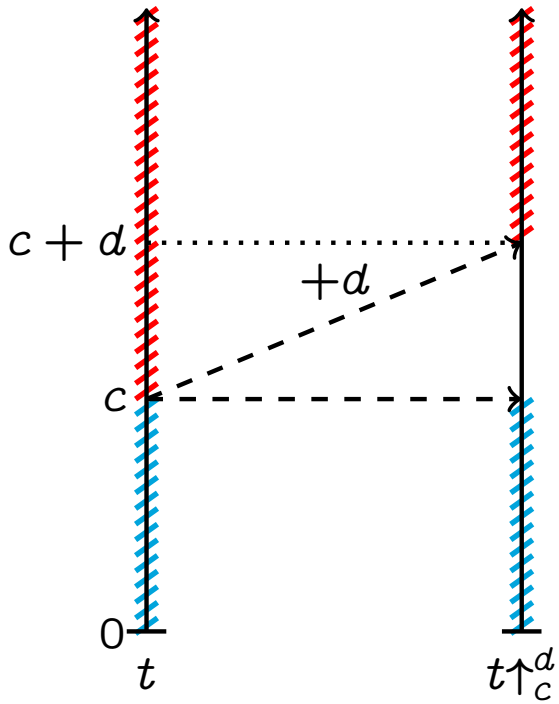
シフトの定義

$$x{\uparrow}_c^d = \begin{cases} x+d & (c \le x) \\ x & (x < c) \end{cases}$$

$$(t\,u){\uparrow}_c^d = t{\uparrow}_c^d\,u{\uparrow}_c^d$$

$$(\lambda\,t){\uparrow}_c^d = \lambda\,t{\uparrow}_{c+1}^d$$

$$t{\uparrow}^d = t{\uparrow}_0^d$$



t 中の全ての自由変数に d を足した項

一般化 ↓　　↑ $c = 0$

$t{\uparrow}_c^d$ ： t 中の c 以上の自由変数に d を足した項

シフトと代入の代数的性質 [Nipkow, 2001]

(1) の定義:

シフトと代入の代数的性質 [Nipkow, 2001]

(1) の定義:

- Church-Rosser の定理を示すには以下の補題があれば十分

$$c \leq c' \Rightarrow t{\uparrow}_c^1{\uparrow}_{c'+1}^1 = t{\uparrow}_{c'}^1{\uparrow}_c^1$$

$$x \leq c \Rightarrow t\{x := u\}{\uparrow}_c^1 = t{\uparrow}_{c+1}^1\{x := u{\uparrow}_c^1\}$$

$$c \leq x \Rightarrow t\{x := u\}{\uparrow}_c^1 = t{\uparrow}_c^1\{x+1 := u{\uparrow}_c^1\}$$

$$t{\uparrow}_x^1\{x := u\} = t$$

$$x \leq y \Rightarrow t\{y+1 := v{\uparrow}_x^1\}\{x := u\{y := v\}\} = t\{x := u\}\{y := v\}$$

シフトと代入の代数的性質 [Nipkow, 2001]

(1) の定義:

- Church-Rosser の定理を示すには以下の補題があれば十分
- 証明全体を通してシフトの右上の数は 1 以外に出現しない
- 証明が簡潔 (多くの補題の形式的証明は 1 行で済んでいる)

$$c \leq c' \Rightarrow t{\uparrow}_c^1{\uparrow}_{c'+1}^1 = t{\uparrow}_{c'}^1{\uparrow}_c^1$$

$$x \leq c \Rightarrow t\{x := u\}{\uparrow}_c^1 = t{\uparrow}_{c+1}^1\{x := u{\uparrow}_c^1\}$$

$$c \leq x \Rightarrow t\{x := u\}{\uparrow}_c^1 = t{\uparrow}_c^1\{x+1 := u{\uparrow}_c^1\}$$

$$t{\uparrow}_x^1\{x := u\} = t$$

$$x \leq y \Rightarrow t\{y+1 := v{\uparrow}_x^1\}\{x := u\{y := v\}\} = t\{x := u\}\{y := v\}$$

シフトと代入の代数的性質 [Nipkow, 2001]

(1) の定義:

- Church-Rosser の定理を示すには以下の補題があれば十分
- 証明全体を通してシフトの右上の数は 1 以外に出現しない
- 証明が簡潔 (多くの補題の形式的証明は 1 行で済んでいる)

$$c \leq c' \Rightarrow t{\uparrow}_c^1{\uparrow}_{c'+1}^1 = t{\uparrow}_{c'}^1{\uparrow}_c^1$$
$$x \leq c \Rightarrow t\{x := u\}{\uparrow}_c^1 = t{\uparrow}_{c+1}^1\{x := u{\uparrow}_c^1\}$$
$$c \leq x \Rightarrow t\{x := u\}{\uparrow}_c^1 = t{\uparrow}_c^1\{x+1 := u{\uparrow}_c^1\}$$
$$t{\uparrow}_x^1\{x := u\} = t$$
$$x \leq y \Rightarrow t\{y+1 := v{\uparrow}_x^1\}\{x := u\{y := v\}\} = t\{x := u\}\{y := v\}$$

(2) の定義:

- 直接証明に使うのには向かない
- $u[x := t] = u\{x := t{\uparrow}^x\}$ で書き換えて証明すると良い

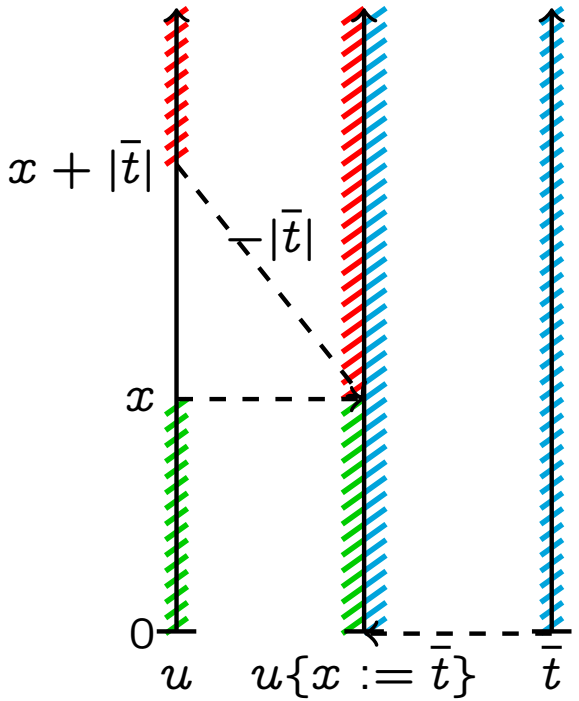
並列代入 (1)

$$y\{x := \bar{t}\} = \begin{cases} y - |\bar{t}| & (x + |\bar{t}| \leq y) \\ \bar{t}_{y-x} & (x \leq y < x + |\bar{t}|) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\,v)\{x := \bar{t}\} = (u\{x := \bar{t}\})\,(v\{x := \bar{t}\})$$

$$(\lambda\,u)\{x := \bar{t}\} = \lambda\,(u\{x + 1 := \underline{\bar{t}\uparrow^1}\})$$

$$\bar{t}\uparrow_c^d = [t\uparrow_c^d \mid t \leftarrow \bar{t}]$$



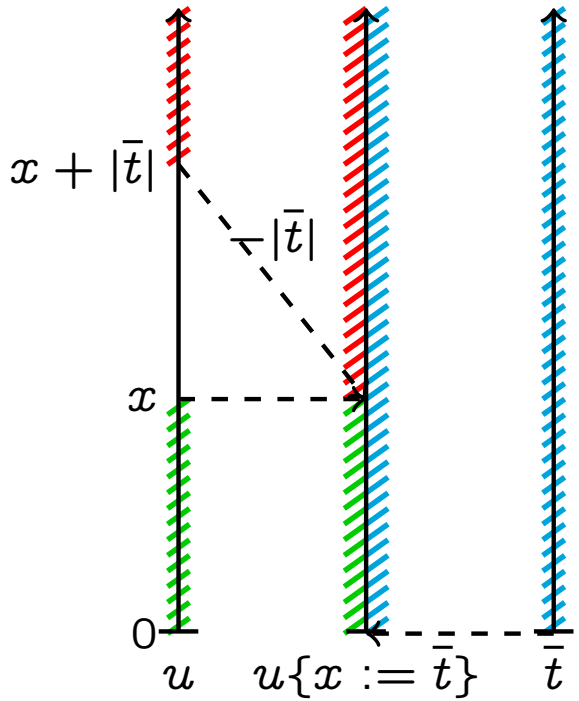
並列代入 (1)

$$y\{x := \bar{t}\} = \begin{cases} y - |\bar{t}| & (x + |\bar{t}| \leq y) \\ \bar{t}_{y-x} & (x \leq y < x + |\bar{t}|) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\,v)\{x := \bar{t}\} = (u\{x := \bar{t}\})\,(v\{x := \bar{t}\})$$

$$(\lambda\,u)\{x := \bar{t}\} = \lambda\,(u\{x + 1 := \underline{\bar{t}\uparrow^1}\})$$

$$\bar{t}\uparrow_c^d = [t\uparrow_c^d \mid t \leftarrow \bar{t}]$$



- $u\{x := \bar{t}\} \quad \approx \quad u[x, \ldots, x + |\bar{t}| - 1 := \bar{t}_0, \ldots, \bar{t}_{|\bar{t}|-1}]$

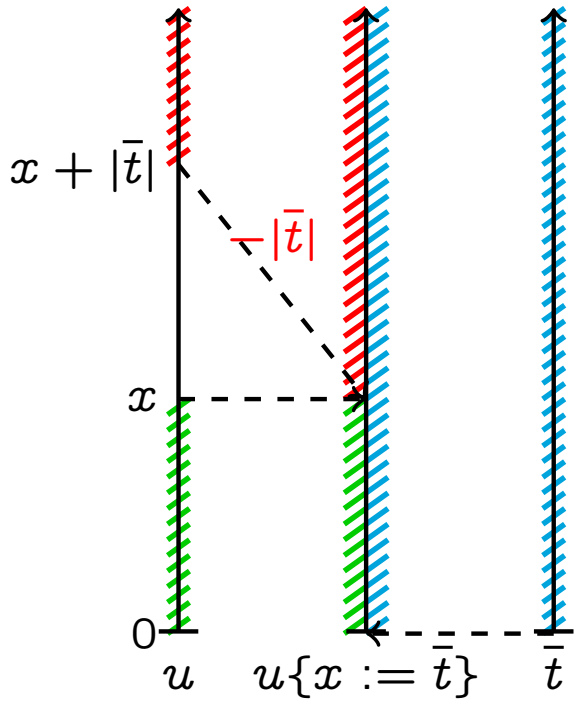
並列代入 (1)

$$y\{x := \bar{t}\} = \begin{cases} y - |\bar{t}| & (x + |\bar{t}| \le y) \\ \bar{t}_{y-x} & (x \le y < x + |\bar{t}|) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\,v)\{x := \bar{t}\} = (u\{x := \bar{t}\})\,(v\{x := \bar{t}\})$$

$$(\lambda\,u)\{x := \bar{t}\} = \lambda\,(u\{x + 1 := \bar{t}\uparrow^1\})$$

$$\bar{t}\uparrow_c^d = [t\uparrow_c^d \mid t \leftarrow \bar{t}]$$



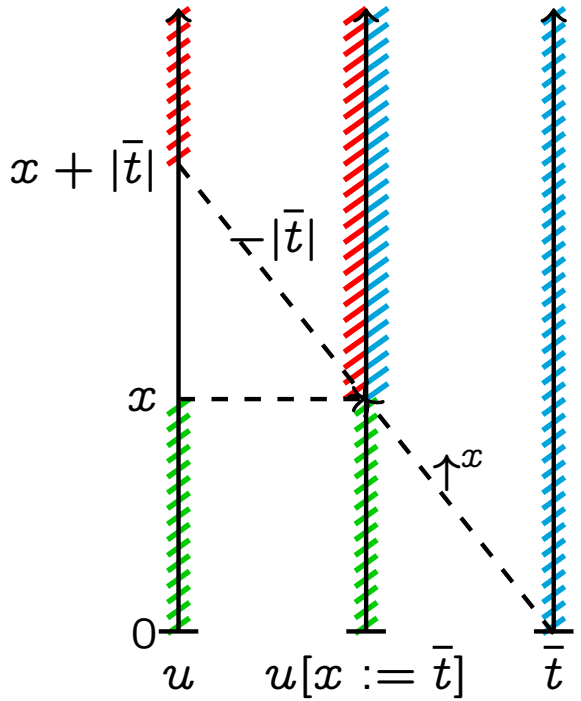
- $u\{x := \bar{t}\} \quad \approx \quad u[x, \ldots, x + |\bar{t}| - 1 := \bar{t}_0, \ldots, \bar{t}_{|\bar{t}|-1}]$
- 代入の範囲が変数 $|\bar{t}|$ 個分なので -1 ではなく $-|\bar{t}|$

並列代入 (2)

$$y[x := \bar{t}] = \begin{cases} y - |\bar{t}| & (x + |\bar{t}| \leq y) \\ \bar{t}_{y-x}{\uparrow^x} & (x \leq y < x + |\bar{t}|) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\, v)[x := \bar{t}] = (u[x := \bar{t}])\,(v[x := \bar{t}])$$

$$(\lambda\, u)[x := \bar{t}] = \lambda\,(u[x + 1 := \bar{t}])$$

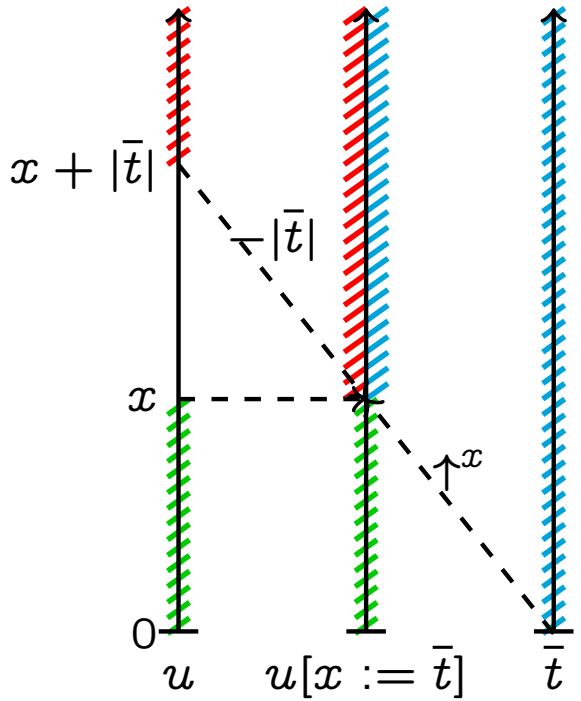


並列代入 (2)

$$y[x := \bar{t}] = \begin{cases} y - |\bar{t}| & (x + |\bar{t}| \leq y) \\ \bar{t}_{y-x}{\uparrow^x} & (x \leq y < x + |\bar{t}|) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\,v)[x := \bar{t}] = (u[x := \bar{t}])\,(v[x := \bar{t}])$$

$$(\lambda\,u)[x := \bar{t}] = \lambda\,(u[x + 1 := \bar{t}])$$



Coq 上で使う定義:

$$y[x := \bar{t}] = \begin{cases} \mathsf{nth}(y - x - |\bar{t}|, \bar{t}, y - x){\uparrow^x} & (x \leq y) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\,v)[x := \bar{t}] = (u[x := \bar{t}])\,(v[x := \bar{t}])$$

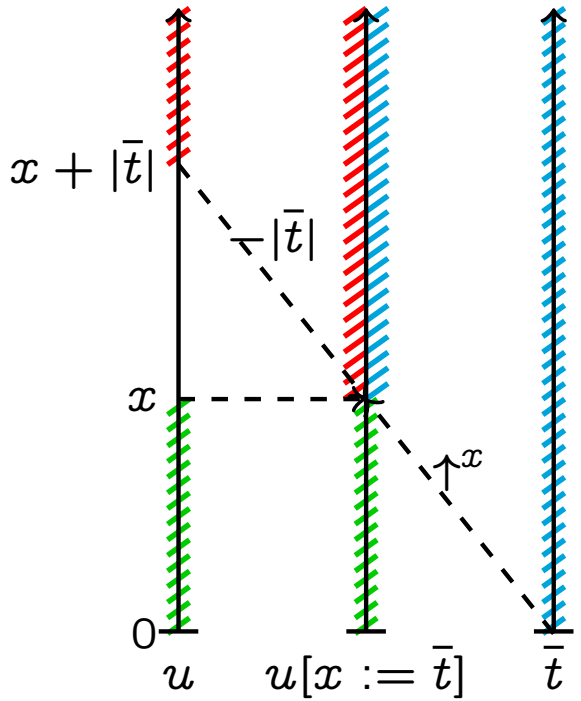
$$(\lambda\,u)[x := \bar{t}] = \lambda\,(u[x + 1 := \bar{t}])$$

並列代入 (2)

$$y[x := \bar{t}] = \begin{cases} y - |\bar{t}| & (x + |\bar{t}| \leq y) \\ \bar{t}_{y-x}{\uparrow^x} & (x \leq y < x + |\bar{t}|) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\, v)[x := \bar{t}] = (u[x := \bar{t}])\, (v[x := \bar{t}])$$

$$(\lambda\, u)[x := \bar{t}] = \lambda\, (u[x + 1 := \bar{t}])$$



Coq 上で使う定義:

$$y[x := \bar{t}] = \begin{cases} \mathsf{nth}(y - x - |\bar{t}|, \bar{t}, y - x){\uparrow^x} & (x \leq y) \\ y & (y < x) \end{cases}$$

$$(u\, v)[x := \bar{t}] = (u[x := \bar{t}])\, (v[x := \bar{t}])$$

$$(\lambda\, u)[x := \bar{t}] = \lambda\, (u[x + 1 := \bar{t}])$$

並列代入 (1) の代入補題

$$
\begin{aligned}
x \leq y \Rightarrow t\{y + |\overline{u}| := \overline{v}\uparrow_x^{|\overline{u}|}\}\{x := \overline{u}\{y := \overline{v}\}\} \\
= t\{x := \overline{u}\}\{y := \overline{v}\}
\end{aligned}
$$

並列代入 (1) の代入補題

$$x \leq y \Rightarrow t\{y + |\overline{u}| := \overline{v}\uparrow_x^{|\overline{u}|}\}\{x := \overline{u}\{y := \overline{v}\}\}$$
$$= t\{x := \overline{u}\}\{y := \overline{v}\}$$

- $d = 1$ の形に限らないシフトが必要

並列代入 (1) の代入補題

$$x \leq y \Rightarrow t\{y + |\overline{u}| := \overline{v}\uparrow_x^{|\overline{u}|}\}\{x := \overline{u}\{y := \overline{v}\}\}$$
$$= t\{x := \overline{u}\}\{y := \overline{v}\}$$

- $d = 1$ の形に限らないシフトが必要
- 代入補題の証明に必要な各種補題を一般化する必要がある

並列代入 (1) の代入補題

$$x \leq y \Rightarrow t\{y + |\overline{u}| := \overline{v}\uparrow_x^{|\overline{u}|}\}\{x := \overline{u}\{y := \overline{v}\}\}$$
$$= t\{x := \overline{u}\}\{y := \overline{v}\}$$

- $d = 1$ の形に限らないシフトが必要
- 代入補題の証明に必要な各種補題を一般化する必要がある
- Nipkow の方法のように簡単な証明にならない

シフトと並列代入 (2) に関する代数的性質

$$t\uparrow_n^0 = t \tag{1}$$

$$c \le c' \le c + d \Rightarrow t\uparrow_c^d\uparrow_{c'}^{d'} = t\uparrow_c^{d'+d} \tag{2}$$

$$c' \le c \Rightarrow t\uparrow_c^d\uparrow_{c'}^{d'} = t\uparrow_{c'}^{d'}\uparrow_{d'+c}^{d} \tag{3}$$

$$c \le n \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_c^d[d + n := \overline{u}] \tag{4}$$

$$n \le c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^{d}[n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^{d}] \tag{5}$$

$$c \le n \wedge |\overline{u}| + n \le d + c \Rightarrow$$

$$t\uparrow_c^d[n := \overline{u}] = t\uparrow_c^{d-|\overline{u}|} \tag{6}$$

$$m \le n \Rightarrow t[m := \overline{u}][n := \overline{v}] = t[|\overline{u}| + n := \overline{v}][m := \overline{u}[n - m := \overline{v}]] \tag{7}$$

$$t[|\overline{v}| + n := \overline{u}][n := \overline{v}] = t[n := \overline{v} +\!\!+ \overline{u}] \tag{8}$$

$$t[n := []] = t \tag{9}$$

where

$$\overline{t}\uparrow_c^d = [t\uparrow_c^d \mid t \leftarrow \overline{t}]$$

$$\overline{t}[n := \overline{u}] = [t[n := \overline{u}] \mid t \leftarrow \overline{t}]$$

シフトと並列代入 (2) に関する代数的性質

$$t\uparrow_n^0 = t \tag{1}$$

$$c \le c' \le c + d \Rightarrow t\uparrow_c^d\uparrow_{c'}^{d'} = t\uparrow_c^{d'+d} \tag{2}$$

$$c' \le c \Rightarrow t\uparrow_c^d\uparrow_{c'}^{d'} = t\uparrow_{c'}^{d'}\uparrow_{d'+c}^{d} \tag{3}$$

$$c \le n \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_c^d[d + n := \overline{u}] \tag{4}$$

$$n \le c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^{d}[n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^{d}] \tag{5}$$

$$c \le n \wedge |\overline{u}| + n \le d + c \Rightarrow$$

$$t\uparrow_c^d[n := \overline{u}] = t\uparrow_c^{d-|\overline{u}|} \tag{6}$$

$$m \le n \Rightarrow t[m := \overline{u}][n := \overline{v}] = t[|\overline{u}| + n := \overline{v}][m := \overline{u}[n - m := \overline{v}]] \tag{7}$$

$$t[|\overline{v}| + n := \overline{u}][n := \overline{v}] = t[n := \overline{v} +\!\!+ \overline{u}] \tag{8}$$

$$t[n := []] = t \tag{9}$$

where

$$\overline{t}\uparrow_c^d = [t\uparrow_c^d \mid t \leftarrow \overline{t}]$$

$$\overline{t}[n := \overline{u}] = [t[n := \overline{u}] \mid t \leftarrow \overline{t}]$$

補題(5)

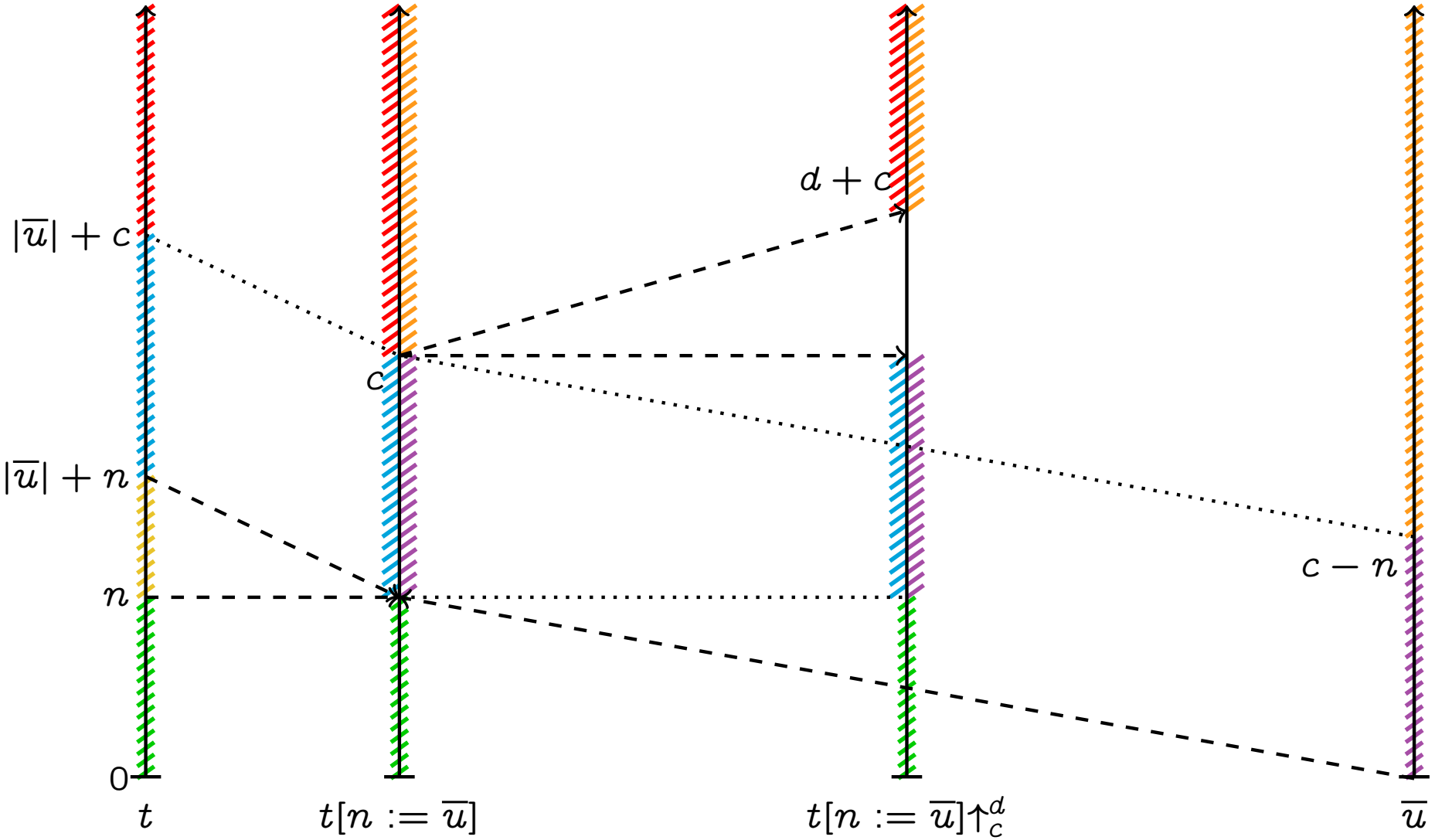
$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

補題(5)

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

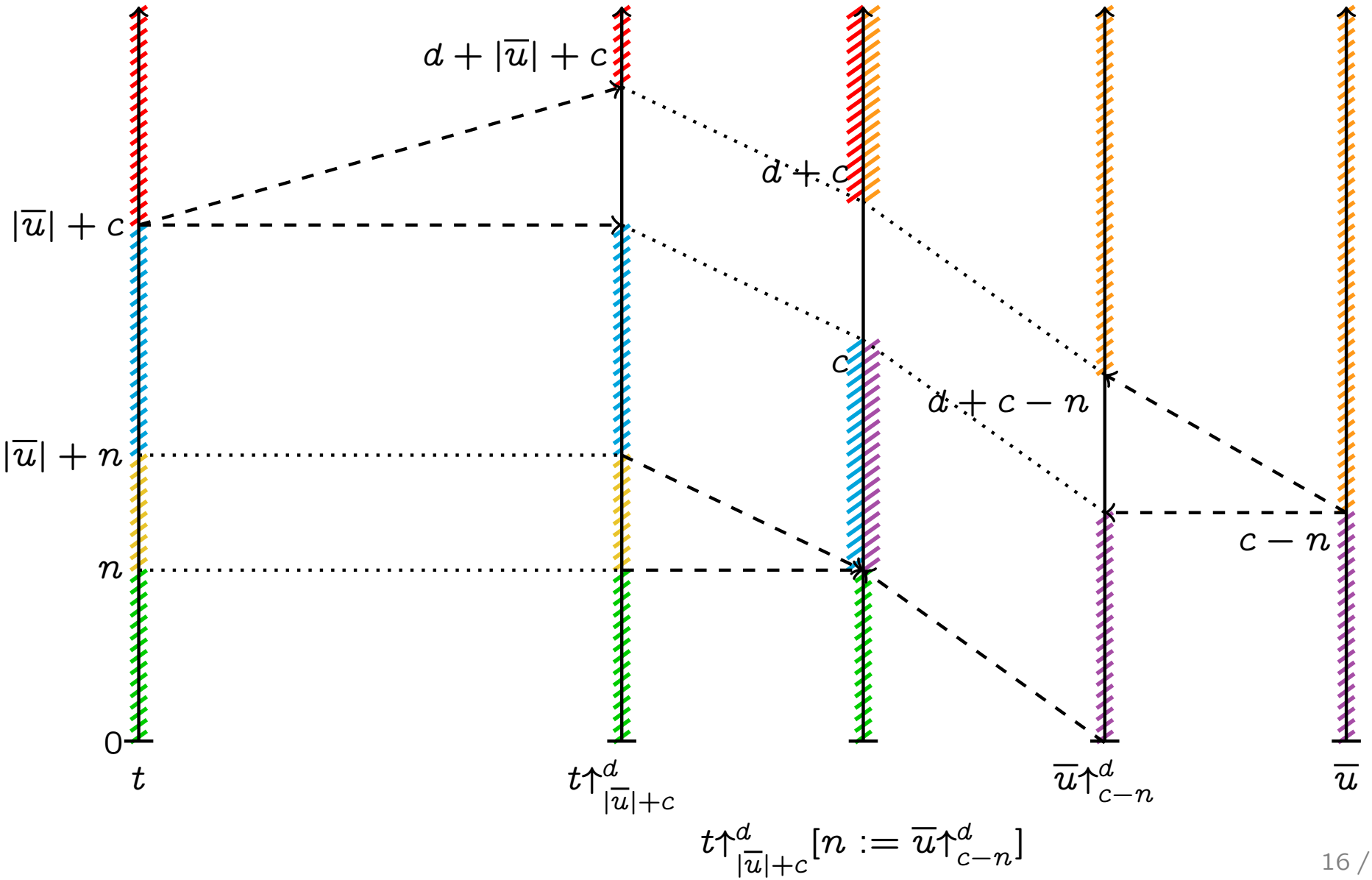
補題(5)

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$



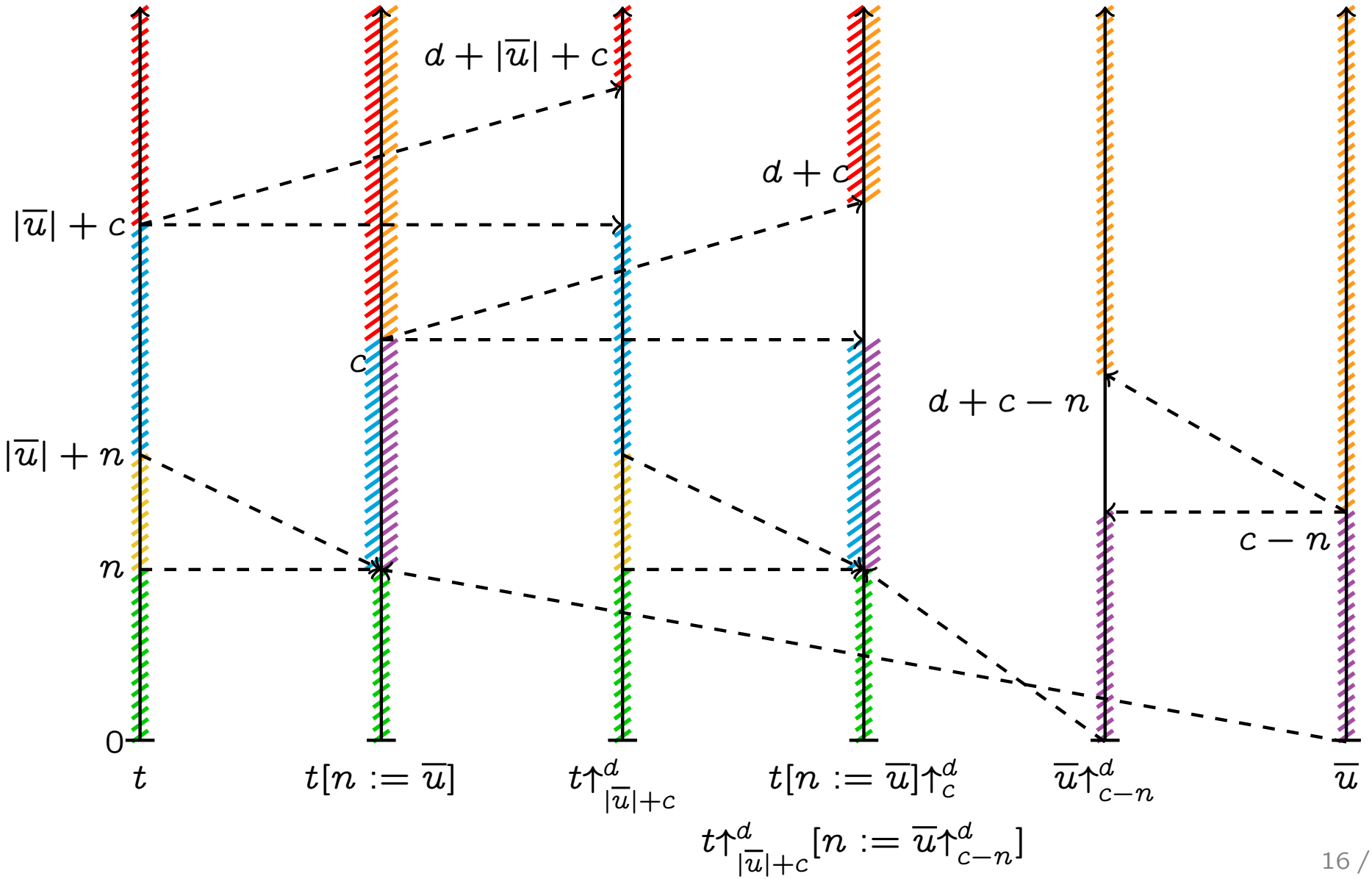
補題(5)

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$



補題(5)

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$



証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow_{n+c'}^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+(n+c')}^d [n := \overline{u}\uparrow_{n+c'-n}^d]$$

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow^d_c = t\uparrow^d_{|\overline{u}|+c}[n := \overline{u}\uparrow^d_{c-n}]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c'} = t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c')}[n := \overline{u}\uparrow^d_{n+c'-n}]$$

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow_{n+c'}^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+(n+c')}^d [n := \overline{u}\uparrow_{n+c'-n}^d]$$

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow_{n+c'}^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+(n+c')}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c'}^d]$$

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow^d_c = t\uparrow^d_{|\overline{u}|+c}[n := \overline{u}\uparrow^d_{c-n}]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c'} = t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c')}[n := \overline{u}\uparrow^d_{c'}]$$

項 t についての帰納法

1. 変数の場合
2. 関数適用の場合
3. λ 抽象の場合

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow_{n+c'}^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+(n+c')}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c'}^d]$$

項 t についての帰納法

1. 変数の場合
2. 関数適用の場合
3. λ 抽象の場合

} 等式のソルバで証明

証明の流れ

$$n \leq c \Rightarrow t[n := \overline{u}]\uparrow_c^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+c}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c-n}^d]$$

仮定の除去

$$\forall m.\, n \leq m \Rightarrow P[n, m]$$

$$\Leftrightarrow \forall m'.\quad P[n, n + m']$$

$$t[n := \overline{u}]\uparrow_{n+c'}^d = t\uparrow_{|\overline{u}|+(n+c')}^d [n := \overline{u}\uparrow_{c'}^d]$$

項 t についての帰納法

1. 変数の場合 — 場合分けを展開して証明
2. 関数適用の場合
3. λ 抽象の場合

— 等式のソルバで証明

証明 - 関数適用と λ 抽象の場合

2. 関数適用の場合

$$t[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} u[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} =$$
$$t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]\, u\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

3. λ 抽象の場合

$$\lambda\, t[n+1 := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c+1} = \lambda\, t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)+1}[n+1 := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

証明 - 関数適用と λ 抽象の場合

2. 関数適用の場合

$$t[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} u[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} =$$
$$t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]\, u\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

3. λ 抽象の場合

$$\lambda\, t[n+1 := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c+1} = \lambda\, t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)+1}[n+1 := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

- $+1$ の付け替えと帰納法の仮定での書き換えだけで示せる

証明 - 関数適用と λ 抽象の場合

2. 関数適用の場合

$$t[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} u[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} =$$
$$t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]\, u\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

3. λ 抽象の場合

$$\lambda\, t[n+1 := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c+1} = \lambda\, t\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)+1}[n+1 := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

- +1 の付け替えと帰納法の仮定での書き換えだけで示せる
- 以下の仮定を追加して Coq の等式に関するソルバ `congruence` を用いて証明

$$\texttt{addSn} : \forall m\, n.\, (m+1)+n = (m+n)+1$$
$$\texttt{addnS} : \forall m\, n.\, m+(n+1) = (m+n)+1$$

congruence タクティク

- Congruence closure アルゴリズムに基く決定手続き
  - $x_1 = x_1' \wedge \cdots \wedge x_n = x_n' \Rightarrow y = y'$
  - 証明に使うのは等式での書き換えのみ
  - 定義を展開しないと証明できない問題は解けない

congruence タクティク

- Congruence closure アルゴリズムに基く決定手続き
  - $x_1 = x_1' \wedge \cdots \wedge x_n = x_n' \Rightarrow y = y'$
  - 証明に使うのは等式での書き換えのみ
  - 定義を展開しないと証明できない問題は解けない
- 仮定が量化された等式であってもある程度扱える

congruence タクティク

- Congruence closure アルゴリズムに基く決定手続き
  - $x_1 = x_1' \wedge \cdots \wedge x_n = x_n' \Rightarrow y = y'$
  - 証明に使うのは等式での書き換えのみ
  - 定義を展開しないと証明できない問題は解けない
- 仮定が量化された等式であってもある程度扱える
- 応用
  - 定義を量化された等式の形で仮定に追加すると定義の展開が可能
  - 帰納法と congruence だけで自然数の加算や乗算の可換性と結合性が示せる

証明 - 変数の場合

$$\mathbf{1.}\ x[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} = x\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]$$

- 場合分けを全て展開してプレスバーガー算術に帰着させて解く
- 自動証明で解けない部分は手で証明する

証明 - 変数の場合

1. $x[n := \overline{u}]\uparrow^d_{n+c} = x\uparrow^d_{|\overline{u}|+(n+c)}[n := \overline{u}\uparrow^d_c]$

- 場合分けを全て展開してプレスバーガー算術に帰着させて解く
- 自動証明で解けない部分は手で証明する

場合分けの結果として得られる命題:

- $|\bar{t}| + (n + c) \leq x \wedge n \leq x + d \wedge n \leq x \Rightarrow \mathsf{nth}(x - n - |\bar{t}|, \bar{t}, x - n)\uparrow^n\uparrow^d_{n+c} = \mathsf{nth}(x + d - n - |\bar{t}\uparrow^d_c|, \bar{t}\uparrow^d_c, x + d - n)\uparrow^n$
- $x < |\bar{t}| + (n + c) \wedge n \leq x \wedge n \leq x \Rightarrow$
  $\mathsf{nth}(x - n - |\bar{t}|, \bar{t}, x - n)\uparrow^n\uparrow^d_{n+c} = \mathsf{nth}(x - n - |\bar{t}\uparrow^d_c|, \bar{t}\uparrow^d_c, x - n)\uparrow^n$
- $|\bar{t}| + (n + c) \leq x \wedge x + d < n \wedge n \leq x \Rightarrow$
  $\mathsf{nth}(x - n - |\bar{t}|, \bar{t}, x - n)\uparrow^n\uparrow^d_{n+c} = x + d$
- $x < |\bar{t}| + (n + c) \wedge x < n \wedge n \leq x \Rightarrow$
  $\mathsf{nth}(x - n - |\bar{t}|, \bar{t}, x - n)\uparrow^n\uparrow^d_{n+c} = x$
- ...

`omega` タクティクと `lia` タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け

omega タクティクと lia タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け
- 減算を多く含む問題に対して非常に長い時間がかかる

```
Notation minn x y := (x - (x - y)).

Lemma minnC x y : minn x (y - 0) = minn y (x - 0).
Proof.   Time lia.
Restart. Time omega.
Qed.
Lemma minnA x y z : minn (x - 0) (minn (y - 0) z) =
                    minn (minn (x - 0) (y - 0)) z.
Proof.   Time lia.
Restart. Time omega.
Qed.
```

omega タクティクと lia タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け
- 減算を多く含む問題に対して非常に長い時間がかかる

```
Notation minn x y := (x - (x - y)).

Lemma minnC x y : minn x (y - 0) = minn y (x - 0).
Proof.   Time lia.   → 0 秒
Restart. Time omega.
Qed.
Lemma minnA x y z : minn (x - 0) (minn (y - 0) z) =
                    minn (minn (x - 0) (y - 0)) z.
Proof.   Time lia.
Restart. Time omega.
Qed.
```

omega タクティクと lia タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け
- 減算を多く含む問題に対して非常に長い時間がかかる

```
Notation minn x y := (x - (x - y)).

Lemma minnC x y : minn x (y - 0) = minn y (x - 0).
Proof.    Time lia.   → 0 秒
Restart. Time omega. → 13 秒
Qed.
Lemma minnA x y z : minn (x - 0) (minn (y - 0) z) =
                    minn (minn (x - 0) (y - 0)) z.
Proof.    Time lia.
Restart. Time omega.
Qed.
```

omega タクティクと lia タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け
- 減算を多く含む問題に対して非常に長い時間がかかる

```
Notation minn x y := (x - (x - y)).

Lemma minnC x y : minn x (y - 0) = minn y (x - 0).
Proof.    Time lia.   → 0 秒
Restart. Time omega. → 13 秒
Qed.
Lemma minnA x y z : minn (x - 0) (minn (y - 0) z) =
                    minn (minn (x - 0) (y - 0)) z.
Proof.    Time lia.   → 5 秒
Restart. Time omega.
Qed.
```

omega タクティクと lia タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け
- 減算を多く含む問題に対して非常に長い時間がかかる

```
Notation minn x y := (x - (x - y)).

Lemma minnC x y : minn x (y - 0) = minn y (x - 0).
Proof.    Time lia.   → 0 秒
Restart. Time omega. → 13 秒
Qed.
Lemma minnA x y z : minn (x - 0) (minn (y - 0) z) =
                    minn (minn (x - 0) (y - 0)) z.
Proof.    Time lia.   → 5 秒
Restart. Time omega. → timeout
Qed.
```

omega タクティクと lia タクティク

- 量化を含まない範囲のプレスバーガー算術のソルバ
- 自然数の減算 $x \dot{-} y$ については $x \leq y$ と $y \leq x$ で場合分け
- 減算を多く含む問題に対して非常に長い時間がかかる

```
Notation minn x y := (x - (x - y)).

Lemma minnC x y : minn x (y - 0) = minn y (x - 0).
Proof.    Time lia.   → 0 秒
Restart. Time omega.→ 13 秒
Qed.
Lemma minnA x y z : minn (x - 0) (minn (y - 0) z) =
                    minn (minn (x - 0) (y - 0)) z.
Proof.    Time lia.   → 5 秒
Restart. Time omega.→ timeout
Qed.
```

- 論理式中の減算の数を減らすことが重要

場合分けの後の命題に対する自動証明

1. 仮定の除去と算術式を簡単にする操作を交互に適用

場合分けの後の命題に対する自動証明

1. 仮定の除去と算術式を簡単にする操作を交互に適用
   - 算術式を簡単にする操作: 減算や不等号の両辺に共通する部分式を除去

場合分けの後の命題に対する自動証明

1. 仮定の除去と算術式を簡単にする操作を交互に適用
   - 算術式を簡単にする操作: 減算や不等号の両辺に共通する部分式を除去
2. ゴールが算術式の等式になるまで `f_equal` タクティクを適用

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$
$$\hookrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

場合分けの後の命題に対する自動証明

1. 仮定の除去と算術式を簡単にする操作を交互に適用
   - 算術式を簡単にする操作: 減算や不等号の両辺に共通する部分式を除去
2. ゴールが算術式の等式になるまで `f_equal` タクティクを適用

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$
$$\hookrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

3. $n \dot{-} (n \dot{-} m)$ と $n + (m \dot{-} n)$ の形の式について場合分け

場合分けの後の命題に対する自動証明

1. 仮定の除去と算術式を簡単にする操作を交互に適用
   - 算術式を簡単にする操作: 減算や不等号の両辺に共通する部分式を除去
2. ゴールが算術式の等式になるまで `f_equal` タクティクを適用

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$
$$\hookrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

3. $n \dot{-} (n \dot{-} m)$ と $n + (m \dot{-} n)$ の形の式について場合分け
4. 仮定の除去

場合分けの後の命題に対する自動証明

1. 仮定の除去と算術式を簡単にする操作を交互に適用
   - 算術式を簡単にする操作: 減算や不等号の両辺に共通する部分式を除去
2. ゴールが算術式の等式になるまで `f_equal` タクティクを適用

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$
$$\hookrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

3. $n \dot{-} (n \dot{-} m)$ と $n + (m \dot{-} n)$ の形の式について場合分け
4. 仮定の除去
5. `lia` タクティクを実行

証明の長さ

Table: Coq 上での証明の行数 [2]

補題	命題の行数	証明の行数	合計
(1)	1	1	2
(2)	2	1	3
(3)	2	1	3
(4)	2	4	6
(5)	4	6	10
(6)	3	4	7
(7)	4	6	10
(8)	2	4	6
(9)	1	1	2
合計	21	28	49

[2] 1 行の長さは 80 文字を上限とした

関連研究

De Bruijn 代数 [Schäfer et al., 2015]

- De Bruijn 表現の項と並列代入について健全かつ完全な代数的構造
- 決定可能

Autosubst [Schäfer and Tebbi, 2014]

- De Bruijn 代数を応用して Coq 上に自動証明の仕組みを構築
- 項の定義から代入の定義を自動生成
- 非常に複雑な Ltac スクリプトでの自動化

まとめ

- シフトと並列代入の代数的性質に対する (半) 自動証明
  - Coq が元々持っているタクティクを上手く利用している
- 応用
  - Church-Rosser の定理
  - 単純型付き λ 計算と System F の強正規化定理
    強正規化定理の証明でも同様の自動証明の仕組みを利用
- https://github.com/pi8027/lambda-calculus

参考文献 I

de Bruijn, N. G. (1972).

Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation, with application to the Church-Rosser theorem.

Indagationes Mathematicae, 75(5):381–392.

Nipkow, T. (2001).

More Church-Rosser proofs.

Journal of Automated Reasoning, 26(1):51–66.

Schäfer, S., Smolka, G., and Tebbi, T. (2015).

Completeness and decidability of de Bruijn substitution algebra in Coq.

In *Proceedings of the 2015 Conference on Certified Programs and Proofs*, CPP '15, pages 67–73. ACM.

参考文献 II

Schäfer, S. and Tebbi, T. (2014).

Autosubst: Automation for de Bruijn syntax and substitution in Coq.